

Manual teórico pedagógico

Sistemas dinámicos, caos e interpretación responsable de resultados numéricos

Este manual desarrolla los conceptos matemáticos que permiten leer las gráficas de Toolbox Chaos. Cada unidad parte de una intuición, formula el concepto, lo conecta con una pestaña de la interfaz y termina con una actividad de contraste. La meta es construir evidencia mediante cálculos, gráficas y criterios de interpretación.

Contenido temático

Fundamentos

Estado, modelado, flujos de una y dos dimensiones, estabilidad, oscilaciones e integración numérica.

Caos y diagnósticos

Mapas, bifurcaciones, cuencas, Lyapunov, espectros, recurrencia y dimensión.

Sistemas y aplicaciones

Lorenz, Rössler, Chua, Duffing–Ueda, retardo, alta dimensión y orden fraccionario.

Curso y proyecto

Secuencia de 16 unidades, laboratorios reproducibles, actividades y proyecto integrador.

Índice

Organización y criterios de estudio	3
Plan de curso: de los modelos a la evidencia dinámica	3
1. Estado, órbitas y espacio de fases	8
1.1. Flujos y mapas	9
1.2. Equilibrios, Jacobiano y estabilidad local	10
2. Modelado, estabilidad y plano de fases	11
2.1. Modelado, variables de estado y adimensionalización	11
2.2. Flujos de una dimensión, potenciales y formas normales	13
2.3. Sistemas lineales planos y plano traza–determinante	14
2.4. Jacobiano, linealización y nullclines	16
2.5. Osciladores, ciclos límite y Poincaré–Bendixson	17
2.6. Bifurcaciones locales y forma normal de Hopf	18
Síntesis operativa de los fundamentos	20
3. Integración numérica, error y transitorios	20
3.1. Atractores, retratos de fase y series temporales	21
4. Definiciones de caos e indicadores numéricos	22
5. Bifurcaciones, cuencas y multestabilidad	23
5.1. Cuencas de atracción y fronteras	24
6. Lyapunov, análisis espectral y recurrencia	25
6.1. Espectro de amplitud y PSD de Welch	26
6.2. Secciones de Poincaré, dimensión de correlación y recurrencia	27
7. Sistemas fraccionarios y criterio de Matignon	28
8. Geometría, topología y memoria en sistemas dinámicos	30
8.1. Topología del espacio de fases	30
8.2. Problema de valor inicial y flujo	31
8.3. Conjuntos límite, atracción y regiones atrapantes	33
8.4. Conjugación topológica y equivalencia orbital	35
8.5. Variación, cambio de volumen y variedades invariantes	36
8.6. Sección de Poincaré, monodromía y teoría de Floquet	38
8.7. Grado, puntos fijos y existencia	39
8.8. Homoclinicidad, herradura y dinámica simbólica	41
8.9. Estados con memoria y derivadas fraccionarias	42

8.10. ABM-PECE de memoria completa	45
8.11. Comprobación de hipótesis y resultados	46
9. Mapas, flujos, señales y sistemas avanzados	48
9.1. Mapa logístico y diagrama de telaraña	48
9.2. Mapa de Hénon, plegamiento y dinámica simbólica	50
9.3. Lorenz, Rössler, Chua y Duffing-Ueda	51
9.4. Rutas al caos: duplicación, cuasiperiodicidad, intermitencia y crisis	55
9.5. Fractales, cuencas y dimensiones	56
9.6. Series temporales, FFT y densidad espectral	58
9.7. Reconstrucción por retardo y diagnóstico desde una observación	59
9.8. Sistemas con retardo, alta dimensión e hipercaos	60
9.9. Caos conservativo y caos transitorio	62
9.10. Sincronización y control de caos	63
10. Proyecto final sobre un sistema dinámico	65
11. Banco graduado de actividades y problemas	66
12. Interpretación y comunicación de resultados	68
Glosario	70

Tres rutas de lectura

Ruta conceptual: unidades 1–7 para construir el lenguaje geométrico y algebraico. **Ruta computacional:** unidades 8–14 para integrar, diagnosticar y contrastar datos. **Ruta de investigación:** unidades 15–16, proyecto final, banco de problemas y guía de comunicación. En cualquiera de las rutas conviene leer primero la pregunta de interpretación y cerrar cada práctica con su control numérico.

Uso del manual teórico

La teoría de sistemas dinámicos combina tres lenguajes: ecuaciones, geometría y datos numéricos. Conviene pasar continuamente de uno a otro. Strogatz propone construir primero intuición geométrica y después formalizarla; Devaney muestra que las propiedades globales requieren hipótesis precisas; Sprott explota el cálculo y la visualización como laboratorio para descubrir patrones [3, 2, 1]. Aquí se integran esas tres miradas.

Programa de sistemas dinámicos y caos

Objetivo de aprendizaje

Al concluir esta ruta de dieciséis unidades, la persona estudiante podrá formular y adimensionalizar modelos, analizar equilibrios y bifurcaciones, distinguir flujos de mapas, interpretar retratos, series y diagramas, y construir diagnósticos de caos con controles numéricos explícitos. El producto final será un expediente reproducible que conecte ecuaciones, algoritmos, gráficas y límites de la evidencia.

Duración, modalidad y perfil de ingreso. El curso está diseñado para licenciatura avanzada, ingeniería o primer posgrado. Se propone una duración de dieciséis semanas, con dos horas de teoría, una de discusión y dos de laboratorio por semana. Puede impartirse en catorce semanas fusionando las unidades 1–2 y 14–15. Cada práctica conserva sistema, parámetros, condición inicial, integrador, paso, horizonte, transitorio y versión del software.

Prerrequisitos verificables. El curso comienza con una introducción al caos. Se requieren cálculo diferencial e integral, álgebra lineal elemental, números complejos y lectura de ecuaciones diferenciales de primer orden. Antes de iniciar se debe poder: calcular traza, determinante y autovalores de una matriz 2×2 ; derivar un polinomio; distinguir unidades de valores numéricos; representar $y = f(x)$; y reconocer sus intersecciones con $y = x$.

Diagnóstico de entrada

Para $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, calcule $\text{tr } A$, $\det A$ y los autovalores. Para $\dot{x} = x(1-x)$, encuentre los equilibrios y determine el signo de $\dot{x}$ en los intervalos que separan. Finalmente explique por qué $x(t)$ contra t y y contra x responden preguntas distintas. El diagnóstico asigna lecturas de nivelación y se mantiene separado de la calificación.

Lectura complementaria¹

Competencias evaluables.

RA1. Traducir una situación a variables, parámetros, ecuaciones y escalas adimensionales, declarando las hipótesis del modelo.

RA2. Analizar flujos unidimensionales con líneas de fase, estabilidad, potenciales y formas normales.

RA3. Clasificar sistemas lineales planos y usar el Jacobiano para formular predicciones locales en sistemas no lineales.

¹**Lectura complementaria.** Nivelación: Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 3.^a ed., capítulo 1, “First-Order Equations”, y capítulos 2–4, “Planar Linear Systems”, “Phase Portraits for Planar Systems” y “Classification of Planar Systems”; Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2.^a ed., secciones 2.1, “A Geometric Way of Thinking”, y 5.1, “Definitions and Examples”.

- RA4.** Construir nullclines, retratos y mapas de retorno, y aplicar criterios de existencia o exclusión de ciclos.
- RA5.** Reconocer bifurcaciones y rutas al caos, distinguiendo un barrido numérico con una demostración.
- RA6.** Analizar mapas mediante iteración, telarañas, multiplicadores y dinámica simbólica.
- RA7.** Comparar Lorenz, Rössler, Chua y Duffing–Ueda desde ecuaciones, disipación, simetrías, series y proyecciones.
- RA8.** Interpretar Lyapunov, FFT/PSD y dimensiones con estudios de convergencia y sensibilidad.
- RA9.** Delimitar modelos con retardo, alta dimensión, dinámica conservativa, caos transitorio, sincronización, control y memoria fraccionaria.
- RA10.** Comunicar un experimento con datos suficientes para repetirlo y auditar sus afirmaciones.

Evaluación.

Producto	Peso	Evidencia mínima
Problemas analíticos	15 %	Derivación, hipótesis, unidades y clasificación.
Ocho bitácoras de laboratorio	25 %	Contrato numérico, datos, figura, interpretación y contraste.
Dos estudios de caso	20 %	Un mapa y un flujo, cada uno con tres vistas y un indicador cuantitativo.
Examen conceptual y algebraico	15 %	Definiciones operativas, cálculos locales y lectura crítica de gráficas.
Proyecto integrador	25 %	Pregunta, protocolo, reproducción cruzada, datos, discusión de incertidumbre y defensa.

Regla transversal de suficiencia

Una captura aislada sólo demuestra que se produjo una imagen. Una conclusión dinámica requiere el sistema identificado, el contrato numérico, al menos un contraste pertinente y una interpretación compatible con el algoritmo. En todo el curso se separan observación, diagnóstico numérico y afirmación matemática.

Secuencia de las dieciséis unidades.

U	Núcleo	Resultado observable	Laboratorio
1	Estado, órbita, flujo y mapa	Distingue tiempo, iteración y proyección	Lorenz en tres vistas coordinadas.
2	Modelado y escalamiento	Obtiene grupos adimensionales	Duffing en <i>Crear sistema</i> .
3	Flujos 1D y formas normales	Construye líneas de fase	$\dot{x} = \mu - x^2$ y $\dot{x} = \mu x - x^3$.
4	Sistemas lineales 2D	Usa el plano traza–determinante	Nodo, silla, centro y foco.
5	Jacobiano y nullclines	Conecta geometría global y predicción local	Modelo de interacción de dos poblaciones.
6	Osciladores y ciclos límite	Aplica Poincaré–Bendixson y retorno	Normal radial y van der Pol.
7	Bifurcaciones locales	Clasifica saddle–node, transcritical, pitchfork y Hopf	Barridos manuales y <i>Bifurcación</i> .

U	Núcleo	Resultado observable	Laboratorio
8	Integración y error	Separa sensibilidad de error numérico	<i>Comparar métodos</i> con Lorenz.
9	Logística y Hénon	Usa telarañas, multiplicadores y órbitas	Mapas 1D y 2D.
10	Rutas al caos y Lyapunov	Relaciona cascadas, ventanas y expansión	<i>Bifurcación</i> y <i>Lyapunov</i> .
11	Flujos clásicos	Compara mecanismos y geometrías	Lorenz, Rössler, Chua y Duffing–Ueda.
12	Fractales, cuencas y dimensión	Estima escalamiento y discute fronteras	<i>Cuenca de atracción</i> .
13	Series, FFT y reconstrucción	Distingue espectro de reconstrucción	<i>Espectro</i> y retardos.
14	Retardo, alta dimensión y transitorios	Reconoce estado-historia e hipercaos	Mackey–Glass y Lorenz–96.
15	Conservación, sincronía, control y ocultos	Delimita métodos y afirmaciones	Energía, error de sincronía y cuencas.
16	Proyecto integrador	Defiende una cadena completa de evidencia	Reproducción cruzada.

Unidades 1–2. Lenguaje de estado, modelado y escalamiento

Resultado. Dado un fenómeno, la persona identifica un estado suficiente, distingue flujo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \mu)$ de mapa $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n; \mu)$, y obtiene escalas $x = Lu$, $t = t_c\tau$. **Práctica.** Genere Lorenz con $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 28, 8/3)$, $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)$, RK4, $dt = 0.01$, $T = 50$; use la misma trayectoria en *Atractor 3D*, *Retratos 2D* y *Series temporales*. Después adimensionalice Duffing y programe su forma de primer orden en *Crear sistema*. **Lectura de gráfica.** Un cruce en x - y puede separar estados distintos en z ; una amplitud adimensional debe traducirse mediante L . **Criterio de interpretación.** El caos requiere diagnósticos adicionales a una proyección, y la adimensionalización debe acompañarse de un análisis de la incertidumbre del modelo.

Lectura complementaria²

Unidades 3–4. Flujos elementales y clasificación lineal

Resultado. Para $\dot{x} = f(x; \mu)$, se construyen línea de fase y estabilidad mediante $f'(x^*)$. Para $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, se usan $\tau = \text{tr } \mathbf{A}$, $\Delta = \det \mathbf{A}$ y $\tau^2 - 4\Delta$. **Práctica.** Simule $\dot{x} = \mu - x^2$ para $\mu = -0.25, 0, 0.25$. Después compare la silla $\text{diag}(1, -1)$, el nodo $\text{diag}(-1, -2)$, el centro $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y el foco $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. **Lectura de gráfica.** La dirección de flechas y el acercamiento al equilibrio deben coincidir con los signos calculados. **Evidencia de convergencia.** Una serie casi horizontal en tiempo finito requiere una prueba de convergencia; la clasificación lineal aporta una descripción del entorno local de un campo no lineal.

Lectura complementaria³

²**Lectura complementaria.** Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2.^a ed., capítulo 1 y sección 6.1, “Phase Portraits”; Robert C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2.^a ed., capítulo 3 y apéndice G, “The Duffing Oscillator”; Tamás Tél y Márton Gruiz, *Chaotic Dynamics: An Introduction Based on Classical Mechanics*, apéndice A, apartados sobre ecuaciones adimensionales.

³**Lectura complementaria.** Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2.^a ed., secciones 2.1–2.4, 3.1–3.4 y 5.1–5.2; Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 3.^a ed., capítulos 2–4.

Unidades 5–7. Geometría plana, oscilaciones y bifurcaciones

Resultado. Se trazan nullclines, se calcula el Jacobiano y se distinguen familias conservativas de ciclos límite aislados. Se derivan las ramas de las formas normales saddle-node, transcritical, pitchfork y Hopf. **Práctica.** Estudie $\dot{x} = x(1 - x - y)$, $\dot{y} = y(x - \frac{1}{2})$, y la normal $\dot{r} = r(1 - r^2)$, $\dot{\theta} = 1$. Para cada bifurcación use $\mu = -0.2, 0, 0.2$; contraste Lorenz a ambos lados de $\rho = 1$ en *Autovalores*. **Lectura de gráfica.** Una nullcline marca una componente nula, mientras que un ciclo estable atrae transversalmente. **Evidencia de forma normal.** Una nube de barrido requiere ecuaciones reducidas, hipótesis de no degeneración y verificación de genericidad.

Lectura complementaria⁴

Unidad 8. Integración, transitorios y refinamiento

Resultado. Se distingue el error de discretización de la separación dinámica. **Práctica.** En *Comparar metodos*, calcule Lorenz con Euler, Heun y RK4 para $dt = 0.02, 0.01, 0.005$, manteniendo T y el estado inicial. Compare tiempo de separación y una estadística después del transitorio. **Lectura de gráfica.** Las curvas pueden separarse tarde y conservar distribución y geometría. **Criterio de refinamiento.** La validez se apoya en observables convergentes, pasos refinados y horizontes ampliados.

Lectura complementaria⁵

Unidades 9–10. Mapas, rutas al caos y expansión

Resultado. Se usa $|f'(x^*)|$ para puntos fijos y $\lambda_N = N^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} \log |f'(x_n)|$ para expansión finita. **Práctica.** Itere la logística con $x_0 = 0.2$, $r = 2.8, 3.2, 3.5, 4$; descarte 500 y conserve 500 iteraciones. Compare con Hénon. Localice una ventana en *Bifurcación*; para Lorenz repita *Lyapunov* con dos pasos y dos horizontes. **Lectura de gráfica.** Telarañas muestran iteración; ramas muestran valores asintóticos muestreados. **Evidencia para flujos y expansión.** La interpretación distingue mapas de flujos y contrasta un exponente finito positivo con indicadores adicionales y refinamientos.

Lectura complementaria⁶

Unidad 11. Cuatro flujos canónicos

Resultado. Se comparan términos, disipación, simetrías, forzamiento y geometría de Lorenz, Rössler, Chua y Duffing–Ueda. **Práctica.** Use los presets registrados; anote valores cargados; genere *Atractor 3D*, *Retratos 2D* y *Series temporales*; repita con $dt/2$. **Lectura de gráfica.** El número de lóbulos y la apariencia de espiral funcionan como descriptores visuales. **Equivalencia entre representaciones.** Proyecciones parecidas requieren verificar las condiciones de conjugación y equivalencia física.

Lectura complementaria⁷

⁴**Lectura complementaria.** Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 3.^a ed., capítulos 8–10; Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2.^a ed., secciones 6.2–6.3, 7.2–7.6 y 8.1–8.2.

⁵**Lectura complementaria.** Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, apéndice B, apartados sobre solución de EDO, error y paso adaptativo; Robert L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*, 2.^a ed., sección 3.6, “The Computer May Lie”.

⁶**Lectura complementaria.** Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, secciones 1.1–1.7, 3.1–3.2, 5.1–5.3 y capítulo 12; Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2.^a ed., secciones 10.1–10.7 y 12.2.

⁷**Lectura complementaria.** Julien C. Sprott, *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*, capítulos 2–3, apartados sobre Duffing, Lorenz, Rössler, sistemas de Sprott y Chua; Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, capítulo 9, apartados sobre Lorenz, Rössler, Chua y flujos forzados.

Unidades 12–13. Geometría fractal y señales

Resultado. Se estima $D_B \simeq \Delta \log N(\varepsilon) / \Delta \log(1/\varepsilon)$, se distingue FFT de PSD y se construyen vectores de retardo $\mathbf{y}_n = (s_n, s_{n-\tau}, \dots, s_{n-(m-1)\tau})$. **Práctica.** Refine una *Cuenca de atracción* de 100^2 a 200^2 . Reutilice Lorenz en *Espectro*, compare Welch y amplitud, y construya una nube $(x_n, x_{n-\tau})$ desde datos exportados. **Lectura de gráfica.** Busque intervalos de escala, picos, banda y estructura que persista. **Criterio de interpretación.** La fractalidad, el caos y la dimensión m requieren pruebas específicas además de rugosidad, banda ancha o una reconstrucción visual.

Lectura complementaria⁸

Unidades 14–15. Extensiones y límites de alcance

Resultado. Se establecen las historias requeridas por ecuaciones con retardo, los criterios para identificar hipercaos y la adaptación de los análisis a sistemas conservativos, sincronizados, controlados o con memoria fraccionaria. **Práctica.** Compare Mackey–Glass y Lorenz–96; duplique T antes de clasificar una irregularidad larga. Mida la deriva de $H = (x^2 + v^2)/2$ en el oscilador armónico y un error de sincronía $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$. Examine *Coexistencia* separando observación, clasificación numérica y afirmación matemática. **Lectura de gráfica.** Una proyección pierde dimensiones y un transitorio puede imitar un atractor. **Alcance de la interfaz.** Toolbox Chaos organiza simulaciones; la estabilidad global y la eficacia de control requieren sus análisis y evidencias específicas.

Lectura complementaria⁹

Unidad 16. Proyecto integrador

Resultado. Cada equipo conecta predicción algebraica, protocolo, tres representaciones, indicador, control de robustez y límites de la conclusión. **Práctica.** Otro equipo recibe la carpeta, repite el protocolo a partir de la bitácora escrita, registra ambigüedades y compara un observable acordado. **Producto.** Informe con pregunta, antecedentes, ecuaciones, hipótesis, cálculo, configuración, datos, pies autosuficientes, discusión y conclusiones graduadas. **Alcance de la reproducción.** La inferencia empírica se sustenta con ejecuciones reproducibles y conserva un alcance distinto del de una demostración teórica.

Lectura complementaria¹⁰

Rúbrica común.

Criterio	Desempeño sólido	Señal de revisión
Modelo y álgebra	Ecuaciones, símbolos, unidades e hipótesis comprobables	Modelo implícito o cálculo con hipótesis aún por declarar.
Reproducibilidad	Estado, método, paso, tiempo, transitorio y versión	Captura aislada o valores pendientes de registrar.

⁸**Lectura complementaria.** Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, secciones 4.1, 4.4–4.7 y capítulo 13; Robert C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2.ª ed., capítulos 9–10 y apéndice A, “Fourier Analysis”.

⁹**Lectura complementaria.** Julien C. Sprott, *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*, capítulos 4, 6, 8 y 9; Robert C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2.ª ed., capítulos 8 y 12; Kai Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, capítulos sobre problemas de Caputo y métodos predictor–corrector.

¹⁰**Lectura complementaria.** Edward N. Lorenz, *The Essence of Chaos*, capítulos 1–5 y apéndices “The Butterfly Effect”, “Mathematical Excursions” y “Glossary”; Robert C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2.ª ed., capítulos 9–10.

Criterio	Desempeño sólido	Señal de revisión
Lectura de gráficas	Ejes, variable, proyección, régimen y rasgo señalado	Descripción estética desconectada de la ecuación.
Robustez	Refinamiento, horizonte o semilla comparados con criterio	Una ejecución tratada como definitiva.
Alcance	Conclusión graduada y evidencia pendiente por documentar	Uso de prueba, atractor o caos más allá de la evidencia.

Límite de interpretación

Cada pestaña opera dentro de un conjunto definido de sistemas. Algunas herramientas aceptan flujos ODE enteros registrados o dimensiones específicas. El estado *No disponible* comunica el contrato del algoritmo y orienta la selección de una herramienta compatible con la afirmación que se desea evaluar.

Plantilla de bitácora. Cada entrada responde, en este orden: pregunta; ecuación y parámetros; predicción algebraica; configuración de Toolbox Chaos; datos y figura; observación; diagnóstico; prueba de robustez; conclusión acotada; y siguiente experimento.

En cada actividad se recomienda anotar cuatro datos mínimos: sistema y parámetros, condición inicial, método y paso, y horizonte temporal. Ese contrato numérico permite asociar cada gráfica con un experimento definido y reproducir su figura.

Convención para la interfaz. Los nombres de pestañas, botones y opciones aparecen en tipografía sans serif cursiva, por ejemplo *Atractor 3D* o *Calcular bifurcación*. Esos nombres indican dónde realizar el experimento; la explicación matemática permanece en este manual.

1 Estado, órbitas y espacio de fases

Lectura complementaria¹¹

El primer paso consiste en distinguir el estado instantáneo de una trayectoria completa y reconocer qué información conserva o pierde una proyección del espacio de fases. Una fotografía de un péndulo muestra su posición, mientras que el estado incorpora la información necesaria para continuar la evolución según el modelo. Al reunir todos los estados posibles se obtiene el mapa geométrico del problema, es decir, el espacio de fases. En términos matemáticos, sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ el espacio de estados. Un estado es un vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X$. La evolución desde $\mathbf{x}_0$ produce una *órbita*. Para tiempo continuo se escribe

$$\mathcal{O}(\mathbf{x}_0) = \{\Phi_t(\mathbf{x}_0) : t \geq 0\},$$

donde $\Phi_t : X \rightarrow X$ es el flujo. Para tiempo discreto,

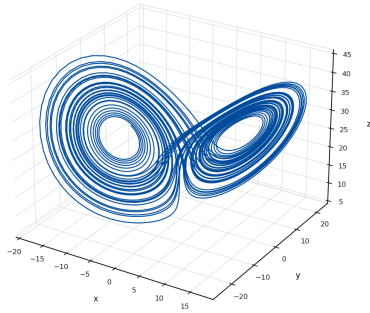
$$\mathcal{O}(\mathbf{x}_0) = \{F^n(\mathbf{x}_0) : n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Una curva en X es una trayectoria; una curva de $x_i(t)$ contra t es una serie temporal. Son representaciones distintas del mismo experimento.

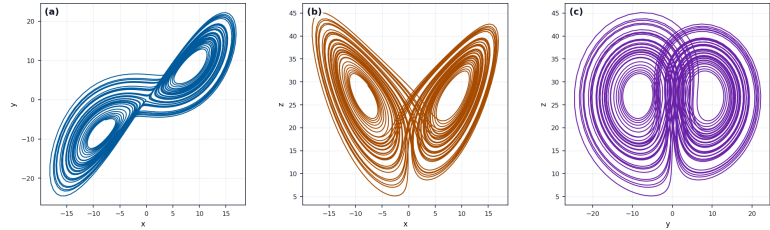
Esta distinción organiza la lectura de la interfaz. En *Atractor 3D* se observa una proyección tridimensional de la órbita; en *Retratos 2D* se muestran pares de coordenadas; en *Series temporales* se conserva el orden temporal. El botón *Usar última trayectoria* permite contrastar las vistas conservando el mismo experimento. Para Lorenz con $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$, la serie $x(t)$ registra cuándo cambia

¹¹**Lectura complementaria.** Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, capítulos 1–2; Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, capítulos 1–3.

la trayectoria entre regiones, mientras que la vista (x, y, z) revela los dos lóbulos. La proyección (x, y) puede ocultar cruces aparentes: dos puntos con el mismo (x, y) pueden tener distinto z .



(a) Órbita proyectada en tres dimensiones.



(b) Tres proyecciones del mismo conjunto de estados.

Figura 1: Una representación geométrica debe leerse junto con las coordenadas que conserva.

De estas representaciones puede describirse la región visitada, la simetría visible y la relación entre coordenadas. La caracterización de caos, atracción y dimensión requiere diagnósticos adicionales a la forma complicada de la curva. Un cruce en una proyección requiere verificar la intersección en el espacio de estados.

Como primera comprobación, genere una trayectoria de Lorenz y use exactamente los mismos datos en las tres pestañas. Identifique un cruce aparente en un retrato 2D y compruebe en la vista 3D que las alturas z son distintas; después explique en dos frases qué información recuperó.

1.1 Flujos y mapas

Los sistemas de tiempo continuo y discreto requieren procedimientos propios. Un flujo asigna un estado a cada instante, mientras que un mapa genera una sucesión después de aplicar repetidamente su regla. Ambos producen órbitas y sus nociones de tiempo determinan herramientas numéricas específicas.

Formalmente, un flujo autónomo satisface

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}), \quad \Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s.$$

Un mapa iterado satisface

$$\mathbf{x}_{n+1} = F(\mathbf{x}_n; \boldsymbol{\mu}), \quad F^{n+m} = F^n \circ F^m.$$

En un flujo, h es un paso de aproximación temporal. En un mapa, $n \mapsto n + 1$ es parte del modelo: insertar RK4 entre dos iteraciones cambiaría el sistema.

Esta diferencia determina el cálculo que ejecuta Toolbox Chaos: el selector de sistema indica si el motor realiza una integración o una iteración. Para un mapa, la duración representa un número de iteraciones útiles; para un flujo, los controles de método, h y tiempo final definen una discretización numérica.

Por ejemplo, en el mapa logístico

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad 0 \leq x_n \leq 1,$$

una órbita de período dos alterna entre dos valores. En un flujo tridimensional, un ciclo límite es una curva cerrada recorrida continuamente. Ambos son periódicos y presentan geometrías y procedimientos de observación propios [4, 2].

De este contraste puede compararse la sucesión de estados y su régimen asintótico dentro del modelo correcto. El índice n representa iteraciones y el análisis de error de integración corresponde a los flujos; las reglas discretas requieren control de redondeo y sensibilidad a la precisión finita.

Para comprobarlo, simule el mapa logístico con $r = 3.2$ y después con $r = 3.9$. Descarte las primeras 500 iteraciones y cuente cuántos valores distintos se distinguen en la cola. Compare con una órbita periódica de un flujo y escriba la diferencia entre “período dos” y “ciclo límite”.

1.2 Equilibrios, Jacobiano y estabilidad local

El análisis de equilibrios relaciona la estabilidad local con el Jacobiano y obliga a distinguir una conclusión local de una afirmación sobre la dinámica global. Un equilibrio es un estado donde el campo vectorial se anula. Para estudiar su entorno, se aproxima la superficie no lineal por su plano tangente. Los autovalores resumen las direcciones de contracción, expansión y giro de esa aproximación.

Así, un equilibrio $\mathbf{x}^*$ cumple $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. Con $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, la linealización es

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = J(\mathbf{x}^*)\boldsymbol{\xi} + O(\|\boldsymbol{\xi}\|^2), \quad J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

Si todos los autovalores tienen parte real negativa, el equilibrio hiperbólico es localmente asintóticamente estable. Una parte real positiva produce una dirección inestable. Signos mezclados producen una silla. Cuando alguna parte real es cero, la linealización sola puede ser inconclusa [3].

Para un mapa, la regla cambia: la estabilidad local de un punto fijo requiere

$$|\lambda_i(DF(\mathbf{x}^*))| < 1$$

para todos los multiplicadores.

En la pestaña *Autovalores*, el botón *Calcular equilibrios y autovalores* muestra los equilibrios disponibles y ubica los autovalores en el plano complejo. El eje vertical representa la parte imaginaria y el horizontal la parte real. Seleccione cada equilibrio por separado antes de comparar clasificaciones.

Como referencia, Lorenz tiene el equilibrio $E_0 = (0, 0, 0)$ y, para $\rho > 1$, dos equilibrios simétricos

$$E_{\pm} = (\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1).$$

Al variar ρ , sus autovalores cambian. La aparición de una pareja compleja con parte real positiva describe inestabilidad espiral local. La existencia de un atractor caótico requiere además análisis de trayectorias y cuencas.

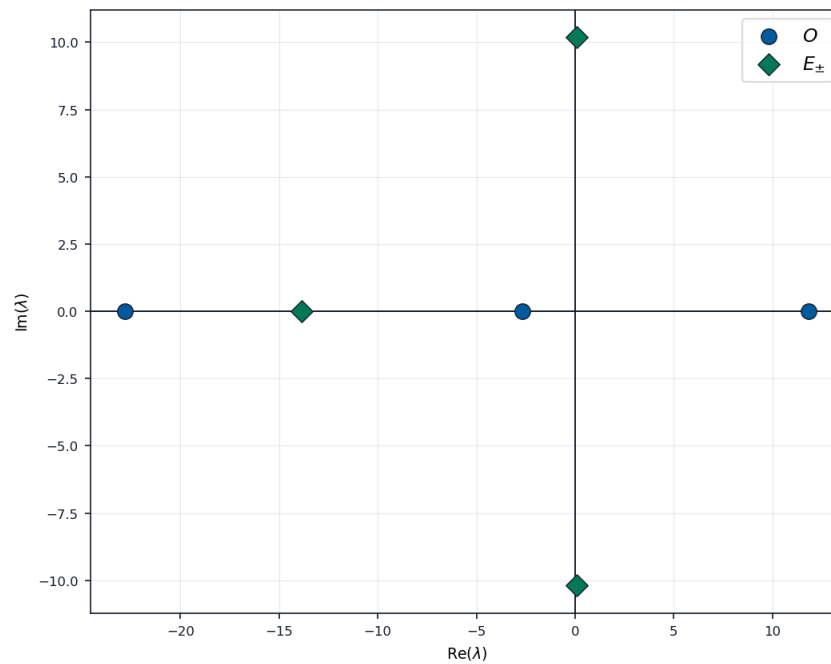


Figura 2: Plano complejo de autovalores. La posición respecto del eje imaginario guía la lectura local; el análisis global incorpora órbitas y cuencas.

El resultado permite clasificar la estabilidad local de equilibrios hiperbólicos. La forma completa de una cuenca, la coexistencia de atractores y la estabilidad global requieren además análisis de órbitas, regiones invariantes y condiciones iniciales.

Autovalores y comportamiento lejos del equilibrio

Calcule los autovalores de Lorenz para dos valores de ρ . Dibuje a mano el semiplano estable y explique qué autovalor cambia la interpretación. Después genere una trayectoria desde dos condiciones iniciales: contraste y distinga el diagnóstico local del comportamiento observado lejos del equilibrio.

2 Modelado, estabilidad y plano de fases

Objetivo de aprendizaje

Construir la base analítica que debe preceder a cualquier diagnóstico de caos: formulación y escalamiento de modelos, dinámica unidimensional, clasificación lineal plana, linealización no lineal, nullclines, ciclos límite y bifurcaciones locales. Cada tema termina con un cálculo reproducible en Toolbox Chaos y con una delimitación explícita de la evidencia que aporta la gráfica y de la que exige cálculos adicionales.

2.1 Modelado, variables de estado y adimensionalización

Variables de estado y escalas. Un *modelo dinámico* especifica un estado $\mathbf{x}$, parámetros $\boldsymbol{\mu}$, una ley de evolución y las hipótesis bajo las cuales esa ley es válida. Elegir el estado incorpora las variables observables y la información necesaria para continuar el movimiento. Por ejemplo, la posición de una masa requiere también su velocidad. La forma de primer orden de una ecuación de orden k amplía el estado hasta contener las derivadas requeridas.

La *adimensionalización* introduce escalas características y reemplaza magnitudes con unidad por cocientes sin dimensión. Esto reduce el número de parámetros independientes, permite comparar experimentos de distinta escala y evita interpretar como esencial un valor que depende de la unidad elegida. Esta operación identifica las razones físicas que controlan el régimen.

Ecuación dimensional y transformación. Considérese el oscilador de Duffing forzado

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \alpha x^3 = F \cos(\Omega t), \quad m > 0, \quad k > 0.$$

Se eligen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad x = Lu, \quad L = \sqrt{\frac{k}{|\alpha|}}.$$

Como $\dot{x} = L\omega_0 u'$ y $\ddot{x} = L\omega_0^2 u''$, al dividir entre kL resulta

$$u'' + 2\zeta u' + u + su^3 = f \cos(\nu\tau),$$

donde las primas representan derivación respecto de τ y

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}, \quad s = \text{sgn}(\alpha), \quad f = \frac{F}{kL}, \quad \nu = \frac{\Omega}{\omega_0}.$$

Los cinco parámetros dimensionales $m, c, k, \alpha, F, \Omega$ quedan organizados en cuatro combinaciones que separan amortiguamiento, signo de la rigidez cúbica, intensidad y frecuencia relativa del forzamiento.

Ejemplo de adimensionalización. Sea $m = 1, k = 4, c = 0.8, \alpha = 2, F = 1$ y $\Omega = 3$, en unidades compatibles. Entonces

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2, & L &= \sqrt{2}, & \zeta &= \frac{0.8}{2(2)} = 0.2, & s &= 1, \\ f &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \simeq 0.1767767, & \nu &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

La ecuación adimensional queda

$$u'' + 0.4u' + u + u^3 = 0.1767767 \cos(1.5\tau).$$

Para convertirla en un flujo autónomo se define $v = u'$ y una fase $\phi = \nu\tau$:

$$u' = v, \quad v' = -0.4v - u - u^3 + 0.1767767 \cos \phi, \quad \phi' = 1.5.$$

La fase crece sin cota, pero el forzamiento depende de ella módulo 2π . Una sección $\phi = 0$ (mód 2π) produce el mapa estroboscópico del oscilador.

Práctica reproducible: Duffing adimensional

Abra *Crear sistema*. Use las variables `u, v, phi`; parámetros `zeta=0.2, s=1, f=0.176776695, nu=1.5`; y ecuaciones, en ese orden, `v, -2*zeta*v-u-s*u**3+f*cos(phi)` y `nu`. Use estado inicial $(0.1, 0, 0)$, método RK4, paso $h = 0.005$, duración 200, 5000 muestras transitorias y umbral de divergencia 10^6 . Pulse *Validar definicion* y *Simular y graficar*; después reutilice la trayectoria en *Retratos 2D* y *Series temporales*. Repita con $h = 0.0025$.

Lectura de las variables escaladas. En $u(\tau)$ se observan transitorio, amplitud y modulación; en el retrato (u, v) , rotación, deformación por el término cúbico y posible acercamiento a un régimen. La fase representa la variable que hace autónomo el forzamiento y se integra en el estado ampliado del sistema. Dos trayectorias que se separan tarde pueden conservar amplitudes, sección estroboscópica y distribución semejantes.

Límite de interpretación

La validación de hipótesis físicas requiere su contraste experimental o teórico, y la existencia de un atractor requiere evidencia adicional a una trayectoria acotada. La comparación entre u y x incorpora el factor L , mientras que la fase creciente se interpreta mediante el forzamiento periódico del oscilador.

Lectura complementaria¹²

2.2 Flujos de una dimensión, potenciales y formas normales

Campo vectorial en una dimensión. Un flujo autónomo unidimensional tiene la forma

$$\dot{x} = f(x; \mu).$$

Los equilibrios satisfacen $f(x^*; \mu) = 0$. Entre dos ceros consecutivos, la continuidad de f mantiene su signo: $f > 0$ orienta la línea de fase hacia la derecha y $f < 0$ hacia la izquierda. Si el equilibrio es hiperbólico,

$$f_x(x^*; \mu) < 0 \implies \text{estable}, \quad f_x(x^*; \mu) > 0 \implies \text{inestable}.$$

La unicidad impide que dos soluciones distintas se crucen y descarta órbitas periódicas no constantes en la recta.

Representación mediante potencial. Toda ecuación escalar puede escribirse formalmente como

$$\dot{x} = -\frac{dV}{dx}, \quad V(x) = -\int^x f(s) ds.$$

A lo largo de una solución,

$$\frac{dV}{dt} = V'(x)\dot{x} = -[f(x)]^2 \leq 0.$$

Los mínimos locales de V corresponden a equilibrios estables; los máximos, a inestables. Su extensión a un sistema general de varias dimensiones requiere una justificación específica.

Ejemplo algebraico resuelto: saddle-node. Para

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

y $\mu = 1/4$, los equilibrios son $x_{\pm} = \pm 1/2$. Como $f_x = -2x$,

$$f_x(-1/2) = 1 > 0, \quad f_x(1/2) = -1 < 0.$$

Por tanto, $x_- = -1/2$ es inestable y $x_+ = 1/2$ estable. El potencial

$$V(x) = \frac{x^3}{3} - \mu x$$

tiene un máximo en $-1/2$ y un mínimo en $1/2$. Para $\mu = 0$ ambos puntos colisionan en $x = 0$, donde $f_x = 0$ y la prueba lineal es inconclusa; para $\mu < 0$ ya no hay equilibrio real.

¹²**Lectura complementaria.** Robert C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2.^a ed., capítulo 3, “An Introduction to Flows”, y apéndice G, “The Duffing Oscillator”; Tamás Tél y Márton Gruiz, *Chaotic Dynamics: An Introduction Based on Classical Mechanics*, apéndice A, apartados sobre ecuaciones adimensionales, integración de EDO y programas de ejemplo; Frank C. Hoppensteadt, *Analysis and Simulation of Chaotic Systems*, 2.^a ed., sección 6.2, apartados sobre Duffing y simulación.

Las tres formas normales escalares.

Mecanismo	Forma normal	Ramas y cambio cualitativo
Saddle-node	$\dot{x} = \mu - x^2$	Ninguna rama para $\mu < 0$; dos ramas $x = \pm\sqrt{\mu}$ para $\mu > 0$.
Transcrítica	$\dot{x} = \mu x - x^2$	Las ramas $x = 0$ y $x = \mu$ intercambian estabilidad en $\mu = 0$.
Pitchfork supercrítica	$\dot{x} = \mu x - x^3$	$x = 0$ pierde estabilidad y nacen $x = \pm\sqrt{\mu}$ estables para $\mu > 0$.

Estas ecuaciones son representantes locales después de cambios de coordenadas y escalas; su uso en un sistema real requiere establecer las hipótesis que conducen a esos polinomios.

Práctica reproducible: líneas de fase

En *Crear sistema*, defina una variable x , un parámetro μ y la ecuación $\mu - x^2$. Para $\mu = -0.25, 0, 0.25$, use los estados iniciales $-1, -0.6, -0.4, 0, 0.4, 0.6, 1$, paso $h = 0.01$ y duración 20. Guarde las series en escalas separadas. Repita para $\mu x - x^2$ y $\mu x - x^3$; antes de simular, dibuje sus ramas y prediga el destino de cada condición.

Lectura de potenciales y retratos lineales. En una serie temporal, la aproximación monótona a un nivel concuerda con una flecha de la línea de fase; el escape rápido indica que el intervalo y el modelo deben revisarse. Cerca de una bifurcación aparece *ralentización crítica*: la tasa lineal es pequeña y el transitorio puede ser mucho más largo. Una gráfica contra μ debe distinguir ramas estables e inestables; las ramas inestables requieren continuación o estados iniciales controlados para su representación.

Límite de interpretación

Un equilibrio requiere un criterio de convergencia y una rama requiere continuación o barridos de parámetros que la localicen. En un punto no hiperbólico $f'(x^*) = 0$, el análisis conserva términos no lineales o incorpora un estudio de signos.

Lectura complementaria¹³

2.3 Sistemas lineales planos y plano traza–determinante

Matriz del sistema y solución espectral. Para el sistema homogéneo

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

la solución es $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$. Los autovalores satisfacen

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0, \quad \tau = a + d, \quad \Delta = ad - bc.$$

Así,

$$\lambda_{\pm} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}.$$

El signo de Δ detecta una silla cuando es negativo. Si $\Delta > 0$, el signo de τ decide atracción o repulsión y el discriminante $\mathcal{D} = \tau^2 - 4\Delta$ separa autovalores reales de complejos.

¹³**Lectura complementaria.** Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2.^a ed., secciones 2.1–2.4, 2.7–2.8 y 3.1–3.6; Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 3.^a ed., capítulo 1, apartados sobre ecuación logística, cosecha y bifurcaciones.

Clasificación algebraica.

Condición	Tipo hiperbólico	Lectura local
$\Delta < 0$	Silla	Una dirección entra y otra sale.
$\Delta > 0, \mathcal{D} > 0, \tau < 0$	Nodo estable	Dos tasas reales de contracción.
$\Delta > 0, \mathcal{D} > 0, \tau > 0$	Nodo inestable	Dos tasas reales de expansión.
$\Delta > 0, \mathcal{D} < 0, \tau < 0$	Foco estable	Rotación con contracción.
$\Delta > 0, \mathcal{D} < 0, \tau > 0$	Foco inestable	Rotación con expansión.
$\tau = 0, \Delta > 0$	Centro lineal	Órbitas periódicas neutrales en el sistema lineal.

Las fronteras $\Delta = 0$ y $\mathcal{D} = 0$ contienen casos degenerados; la recta $\tau = 0$ requiere especial cuidado en problemas no lineales.

Ejemplo de clasificación por traza y determinante. Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\tau = -2$, $\Delta = 5$ y $\mathcal{D} = 4 - 20 = -16$, de modo que $\lambda_{\pm} = -1 \pm 2i$: el origen es un foco estable. Además,

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2x(-x + 2y) + 2y(-2x - y) = -2(x^2 + y^2),$$

por lo que $r(t) = r_0 e^{-t}$. La velocidad angular es

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} = -2.$$

La órbita gira en sentido horario, con periodo angular π , mientras su radio decrece exponencialmente. Este cálculo explica tanto la forma como la orientación.

Práctica reproducible: atlas de sistemas lineales

En *Crear sistema*, use variables x , y y ecuaciones $a*x+b*y$, $c*x+d*y$. Ejecute: silla $(a, b, c, d) = (1, 0, 0, -1)$; nodo estable $(-1, 0, 0, -2)$; centro $(0, -1, 1, 0)$; y foco estable $(-1, 2, -2, -1)$. Use condiciones $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ y $(-1, 1)$, RK4, $h = 0.01$, $T = 15$. Reutilice cada trayectoria en *Retratos 2D* y verifique sentido de giro y tasas.

Lectura del plano traza–determinante. En un nodo, las órbitas se alinean con la dirección propia de contracción más lenta; en una silla, salvo sobre la variedad estable, terminan dominadas por la dirección inestable. En un foco, el espacio entre vueltas cambia exponencialmente. Una escala automática puede ocultar esa contracción: conviene fijar límites comparables o usar también $r(t)$.

Límite de interpretación

El plano traza–determinante clasifica matrices reales 2×2 . El análisis de sistemas de otra dimensión requiere herramientas acordes con su Jacobiano. Un centro lineal requiere términos de orden superior para determinar si aparece una espiral débil o un ciclo límite, y la orientación de giro se obtiene del campo completo además de τ y Δ .

Lectura complementaria¹⁴

¹⁴**Lectura complementaria.** Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 3.^a ed., capítulos 2–4, con énfasis en retratos y clasificación traza–determinante; Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2.^a ed., secciones 5.1–5.2.

2.4 Jacobiano, linealización y nullclines

Jacobiano, linealización y nullclines. Para

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y),$$

las *nullclines* son los conjuntos $f = 0$ y $g = 0$. Sobre la primera, el vector es vertical; sobre la segunda, horizontal. Sus intersecciones son equilibrios. El *Jacobiano*

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$$

produce la aproximación $\dot{\xi} = J(x^*, y^*)\xi + O(\|\xi\|^2)$. Si el equilibrio es hiperbólico, la clasificación lineal conserva la estructura local cualitativa; si algún autovalor tiene parte real cero, se requieren criterios adicionales.

Ejemplo de Jacobiano y puntos críticos. Considérese

$$\dot{x} = x(1 - x - y), \quad \dot{y} = y\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Las nullclines son

$$x = 0 \text{ o } y = 1 - x, \quad y = 0 \text{ o } x = \frac{1}{2}.$$

Sus intersecciones relevantes son

$$E_0 = (0, 0), \quad E_1 = (1, 0), \quad E_c = (1/2, 1/2).$$

El Jacobiano es

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ y & x - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

En E_0 , $J = \text{diag}(1, -1/2)$: es una silla. En E_1 ,

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

también una silla. En E_c ,

$$J(E_c) = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau = -\frac{1}{2}, \quad \Delta = \frac{1}{4}, \quad \mathcal{D} = -\frac{3}{4}.$$

Los autovalores son

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4},$$

así que el equilibrio de coexistencia es un foco estable local.

Campo de signos. En el primer cuadrante, x aumenta debajo de $y = 1 - x$ y disminuye encima; y aumenta a la derecha de $x = 1/2$ y disminuye a la izquierda. Esta tabla de signos predice el giro alrededor de E_c antes de integrar. También muestra que los ejes son invariantes porque los factores x y y impiden cruzarlos desde datos positivos.

Práctica reproducible: nullclines y linealización

En *Crear sistema*, use variables x , y y ecuaciones $x*(1-x-y)$ y $y*(x-0.5)$. Simule con RK4, $h = 0.01$, $T = 60$, desde $(0.1, 0.1)$, $(0.9, 0.1)$, $(0.2, 0.8)$, $(0.8, 0.8)$, $(1.4, 0.2)$ y $(0.4, 1.2)$. En una

copia del retrato, dibuje las cuatro nullclines y marque los tres equilibrios. Compare la orientación numérica con la tabla de signos y repita una trayectoria con $h/2$.

Lectura del campo y las nullclines. Las órbitas cruzan una nullcline con tangente vertical u horizontal, salvo en un equilibrio. Cerca de E_c , la espiral observada debe contraerse con tasa compatible con $\Re \lambda = -1/4$; lejos de él, la curvatura depende del campo completo. Las separatrices de las sillas organizan regiones del plano; una trayectoria numérica genérica aproxima esa variedad unidimensional con una precisión dependiente del integrador.

Límite de interpretación

Una nullcline localiza donde una componente de la velocidad se anula; la trayectoria y las barreras invariantes se determinan a partir del campo completo. El Jacobiano informa en una vecindad del equilibrio, mientras que la descripción de cuencas globales y coexistencia exige la evidencia correspondiente sobre ciclos. Cuando el estado simulado abandona el dominio físico, la revisión del modelo incorpora esa salida y la conserva visible en la gráfica.

Lectura complementaria¹⁵

2.5 Osciladores, ciclos límite y Poincaré–Bendixson

Ciclos límite y osciladores planos. Una *órbita periódica* satisface $\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$ para algún $T > 0$. Un *ciclo límite* es una órbita periódica aislada: las órbitas cercanas pueden aproximarse a ella o alejarse. Un centro lineal, en cambio, posee una familia continua de órbitas cerradas y ninguna es aislada.

El teorema de Poincaré–Bendixson, en una formulación útil, afirma que si una órbita de un flujo plano permanece en una región compacta, su conjunto límite no contiene equilibrios y se satisfacen las hipótesis regulares, entonces dicho conjunto es una órbita periódica. El teorema delimita los comportamientos posibles al excluir caos determinista sostenido en flujos autónomos suaves de dos dimensiones, pero exige demostrar acotación y ausencia de equilibrios en el conjunto límite.

Ejemplo algebraico resuelto: normal radial. Considérese

$$\dot{x} = (1 - x^2 - y^2)x - y, \quad \dot{y} = x + (1 - x^2 - y^2)y.$$

Con $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = 1.$$

Los radios equilibrados son $r = 0$ y $r = 1$. Como

$$g'(r) = 1 - 3r^2, \quad g'(0) = 1, \quad g'(1) = -2,$$

el origen es inestable y el círculo $r = 1$ es un ciclo límite estable. El periodo es $T = 2\pi$. Para una perturbación radial pequeña $\eta = r - 1$, $\dot{\eta} \simeq -2\eta$, de modo que el multiplicador aproximado de retorno es

$$M = e^{-2T} = e^{-4\pi} < 1.$$

Esto cuantifica la atracción transversal y la distingue de la contracción a un punto.

¹⁵**Lectura complementaria.** Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 3.^a ed., capítulo 8, secciones 8.1–8.5, y capítulo 9, apartados sobre nullclines, estabilidad, sistemas gradiente y hamiltonianos; Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2.^a ed., secciones 6.1–6.3 y 6.8.

Exclusión de ciclos. Si la divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = f_x + g_y$$

mantiene signo estricto en una región simplemente conexa, el criterio de Bendixson–Dulac excluye órbitas periódicas contenidas en ella. Un signo que cambia requiere un criterio adicional para decidir la existencia de un ciclo.

Práctica reproducible: ciclo estable y periodo

En *Crear sistema*, use variables x , y y ecuaciones $(1-x^2-y^2)x-y$ y $x+(1-x^2-y^2)y$. Elija puntos con radios 0.2, 0.8, 1.2, 2, por ejemplo (0.2, 0), (0.8, 0), (1.2, 0), (2, 0). Integre con RK4, $h = 0.01$, $T = 30$. En *Series temporales*, estime el periodo con diez máximos; en *Retratos 2D*, compruebe acercamiento desde dentro y fuera. Repita con $h = 0.005$ y compare periodo y radio medio de las últimas cinco vueltas.

Lectura de ciclos límite. Una espiral que se acumula sobre una curva cerrada sugiere atracción orbital. La serie temporal permite comprobar amplitud y periodo; el retrato muestra aislamiento. Para una evidencia más directa se fija una sección transversal y se grafica r_{n+1} contra r_n : un cruce con la diagonal y pendiente de módulo menor que uno corresponde a un punto fijo estable del mapa de retorno.

Límite de interpretación

Una curva cerrada trazada con pocas muestras puede ser un polígono numérico. Observar varias vueltas exige verificar aislamiento y estabilidad. Poincaré–Bendixson se aplica directamente a mapas, flujos tridimensionales, campos discontinuos o proyecciones planas de una órbita 3D.

Lectura complementaria¹⁶

2.6 Bifurcaciones locales y forma normal de Hopf

Parámetro y cambio de estabilidad. Una *bifurcación* es un cambio cualitativo de la dinámica al variar un parámetro. En una bifurcación local de equilibrio, la linealización pierde hiperbolicidad: un autovalor real cruza cero o un par complejo conjugado cruza el eje imaginario. La condición espectral señala el posible punto de bifurcación; las condiciones de transversalidad y no degeneración deciden si aparece la forma normal genérica.

Mecanismos de bifurcación local.

Bifurcación	Firma lineal	Consecuencia de la forma normal
Saddle–node	Un autovalor simple pasa por 0	Creación o destrucción de dos equilibrios.
Transcrítica	Un autovalor pasa por 0, con ramas preexistentes	Dos ramas intercambian estabilidad.
Pitchfork	Autovalor 0 y simetría apropiada	Una rama simétrica se divide o se reúne.

¹⁶**Lectura complementaria.** Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2.^a ed., secciones 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6 y 8.7; Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 3.^a ed., capítulo 10, apartados sobre conjuntos límite, mapas de Poincaré y teorema de Poincaré–Bendixson, y capítulo 12, apartados sobre Liénard y van der Pol.

Bifurcación	Firma lineal	Consecuencia de la forma normal
Hopf	$\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu),$ $\alpha(0) = 0, \omega(0) \neq 0$	Nace o muere un ciclo pequeño; su estabilidad depende del término cúbico.

Ejemplo algebraico resuelto: Hopf supercrítica. La ecuación compleja

$$\dot{z} = (\mu + i\omega)z - |z|^2 z, \quad \omega > 0,$$

equivale, con $z = re^{i\theta}$, a

$$\dot{r} = \mu r - r^3, \quad \dot{\theta} = \omega.$$

En el origen, los autovalores son $\mu \pm i\omega$. Para $\mu < 0$, el origen es estable y no hay radio positivo equilibrado. Para $\mu > 0$, el origen es inestable y aparece

$$r_* = \sqrt{\mu}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Como $\partial_r(\mu r - r^3)|_{r_*} = \mu - 3\mu = -2\mu < 0$, el ciclo es estable. Si $\mu = 0.09$ y $\omega = 2$, entonces $r_* = 0.3$, $T = \pi$ y el multiplicador radial lineal por vuelta es

$$M = e^{-2\mu T} = e^{-0.18\pi} \simeq 0.568.$$

La amplitud sigue la ley de escala $\sqrt{\mu}$ respecto de μ .

Práctica reproducible: cruce de Hopf

En *Crear sistema*, use variables x , y , parámetros μ y $\omega=2$, y ecuaciones $\mu x - \omega y - (x^2 + y^2)x$ y $\omega x + \mu y - (x^2 + y^2)y$. Ejecute $\mu = -0.09, 0, 0.09, 0.25$ desde $(0.05, 0)$ y $(0.8, 0)$, con RK4, $h = 0.005$, $T = 80$. Estime en cada caso el radio tardío y el periodo. Grafique r^2 contra μ : la predicción exacta de la forma normal es $r^2 = \mu$ para $\mu > 0$.

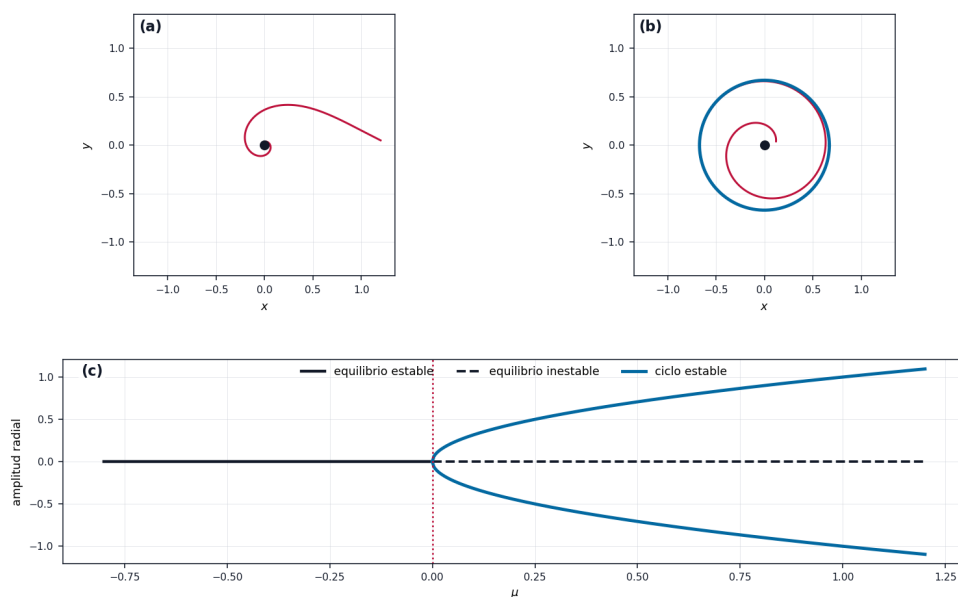


Figura 3: Ejemplo generado para Toolbox Chaos de un cambio tipo Hopf. La lectura correcta combina la estabilidad del equilibrio, la amplitud de la órbita y el parámetro; la identificación de condiciones de genericidad requiere proyecciones y pruebas adicionales.

Interpretación de la gráfica de bifurcación. En un diagrama amplitud–parámetro, la rama $r = 0$ cambia de estabilidad en $\mu = 0$ y la rama $r = \sqrt{\mu}$ nace con tangente vertical. En una simulación, el tiempo de relajación crece cerca de cero porque la tasa $|2\mu|$ disminuye. Si el transitorio se mantiene fijo durante un barrido, ese retraso puede deformar la rama o hacer parecer que existe histéresis.

Límite de interpretación

Un par de autovalores con parte real próxima a cero motiva la verificación de una bifurcación de Hopf mediante cruce transversal, no degeneración y presencia del ciclo. Un barrido en ambas direcciones distingue transitorio, coexistencia e histéresis; la estabilidad de una rama requiere un criterio adicional a los estados visitados.

Lectura complementaria¹⁷

Criterios de análisis para sistemas planos

Cadena mínima antes de hablar de caos

Primero declare el estado y escale el modelo. Después determine equilibrios, nullclines y Jacobiano; construya una predicción local y un retrato global; compruebe el integrador y retire el transitorio. Con esa cadena establecida, calcule bifurcaciones, exponentes, espectros o dimensiones. Esta secuencia permite distinguir un mecanismo dinámico de un artefacto de modelado o de discretización.

Problema integrador de fundamentos

Elija un sistema plano propio. Entregue: variables y unidades; forma adimensional; equilibrios; Jacobiano; clasificación traza–determinante; nullclines; regiones de signo; una afirmación sobre ciclos basada en Poincaré–Bendixson o Bendixson–Dulac; cuatro trayectorias reproducibles en *Crear sistema*; y una comparación con $h/2$. Termine con dos columnas: “evidencia disponible” y “evidencia adicional requerida”.

3 Integración numérica, error y transitorios

Lectura complementaria¹⁸

Para obtener una trayectoria confiable se separan la dinámica del modelo y los efectos del método, el paso, el redondeo y el intervalo transitorio. Una computadora construye una cadena de aproximaciones a la curva continua. En un sistema sensible, dos cálculos correctos pueden perder coincidencia punto a punto después de cierto tiempo; por ello la pregunta científica evalúa la estabilidad de las propiedades reportadas al refinar el cálculo.

La diferencia se aprecia desde el método más sencillo. Euler explícito usa

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}(\mathbf{x}_n),$$

con error global $O(h)$. Heun promedia una pendiente predictora y una correctora y tiene error global $O(h^2)$. RK4 combina cuatro pendientes y, bajo regularidad, tiene error global $O(h^4)$. Un resultado confiable requiere un h adecuado, el tratamiento de la rigidez cuando aparece y un horizonte suficiente.

¹⁷**Lectura complementaria.** Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2.^a ed., secciones 3.1–3.6 y 8.1–8.4; John Guckenheimer y Philip Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, capítulo 3, apartados sobre variedades centrales, formas normales y bifurcaciones locales; Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 3.^a ed., sección 8.5, “Bifurcations”, y capítulo 12, apartado sobre bifurcación de Hopf.

¹⁸**Lectura complementaria.** Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, apéndice B; Frank C. Hoppensteadt, *Analysis and Simulation of Chaotic Systems*, capítulos 1–2.

El transitorio es el tramo inicial todavía influido por la condición inicial. Para una observable $g(\mathbf{x})$, una media asintótica se aproxima por

$$\bar{g}_{T_0, T} = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T g(\mathbf{x}(t)) dt,$$

donde T_0 se elige y justifica de forma explícita.

Toolbox Chaos permite poner esta idea a prueba mediante *Comparar metodos*. En cada pestaña anote dt , *Tiempo total* T y el transitorio descartado. La comparación más útil mantiene fijos sistema, parámetros y condición inicial, y cambia una sola decisión numérica cada vez.

Por ejemplo, calcule Lorenz con RK4 para $h = 0.02, 0.01$ y 0.005 . Las curvas pueden dejar de coincidir en fase, pero la extensión de los lóbulos, la distribución de visitas y los exponentes finitos deben aproximarse de forma consistente si el cálculo es adecuado. La convergencia se juzga sobre el observable que se reportará.

Prueba de refinamiento

Defina una magnitud $Q(h, T, T_0)$: máximo de Poincaré, exponente finito, fracción de cuenca o pico espectral. Compare $Q(h)$, $Q(h/2)$ y $Q(h/4)$. Reporte la diferencia relativa y compruebe también un horizonte mayor. La prueba de convergencia integra esos refinamientos y observables declarados.

Una vez realizadas esas pruebas puede afirmarse que una característica numérica es robusta frente a los refinamientos ensayados. El error se reporta mediante estimaciones, y las trayectorias caóticas se contrastan mediante rangos, tendencias y diagnósticos convergentes.

Efecto del paso de integración en Lorenz

Elija una variable de Lorenz y compare tres pasos. Registre el primer tiempo en que dos series difieren más de una tolerancia elegida y, por separado, compare el rango asintótico de la variable. Explique cómo la pérdida de sincronía se interpreta junto con el control de error del integrador.

3.1 Atractores, retratos de fase y series temporales

La misma cautela permite interpretar puntos fijos, ciclos y conjuntos atractivos al distinguir una trayectoria finita del objeto asintótico. Un atractor reúne las condiciones iniciales de una región que se aproximan a él. La trayectoria visible constituye una muestra temporal de ese conjunto.

Una formulación útil considera un conjunto compacto e invariante $A \subset X$ tal que existe una vecindad U con

$$\text{dist}(\Phi_t(\mathbf{x}), A) \longrightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty), \quad \mathbf{x} \in U.$$

El conjunto de condiciones que satisfacen esa propiedad es la cuenca $\mathcal{B}(A)$. Dependiendo del contexto se añaden condiciones de minimalidad o transitividad; por eso conviene declarar la definición usada [3].

Por ello conviene usar *Atractor 3D*, *Retratos 2D* y *Series temporales* como un conjunto de vistas coordinadas. En *Coexistencia* se pueden cargar condiciones iniciales registradas y comparar resultados para los mismos parámetros.

La interpretación cambia según el régimen: un punto fijo produce series que convergen a constantes; un ciclo límite produce oscilaciones periódicas y una curva cerrada. Una trayectoria aperiódica acotada puede ser compatible con un atractor extraño, pero requiere diagnósticos adicionales. La figura 1 muestra que la identificación requiere varias proyecciones y diagnósticos.

Con estas vistas puede describirse convergencia visible, periodicidad aproximada y geometría muestreada. La atracción requiere explorar varias condiciones iniciales. Los términos “extraño” y “caótico” se establecen con indicadores específicos: los conjuntos geoméricamente complicados requieren evaluar el exponente máximo, y los transitorios largos requieren horizontes ampliados.

Como extensión de la actividad anterior, ejecute el mismo sistema desde una pequeña nube de condiciones iniciales. Para cada una, descarte el mismo transitorio y compare rangos, series y retratos. Proponga una evidencia mínima de que las órbitas se acercan al mismo régimen y anote qué prueba seguiría faltando.

4 Definiciones de caos e indicadores numéricos

Lectura complementaria¹⁹

Comprender el caos exige diferenciar definiciones matemáticas, indicadores numéricos y apariencia irregular, para formular conclusiones con un alcance proporcional a la evidencia. “Se ve caótico” formula una observación inicial que orienta la selección de diagnósticos. La irregularidad puede provenir de ruido, transitorios, discretización o superposición de frecuencias. La teoría estudia propiedades de una dinámica en un conjunto invariante, mientras que el cálculo aporta una muestra finita y redondeada.

En el plano formal, para un mapa continuo $F : X \rightarrow X$ en un espacio métrico, la definición de Devaney combina, sobre el conjunto estudiado: transitividad topológica, densidad de puntos periódicos y dependencia sensible de las condiciones iniciales [2]. Otras comunidades usan entropía positiva, exponentes positivos o propiedades de mezcla. Estas definiciones se relacionan bajo hipótesis y conservan criterios propios.

La sensibilidad puede expresarse como la existencia de $\delta > 0$ tal que, en cada vecindad de un punto, hay otro punto cuyas órbitas llegan a separarse al menos δ . Un exponente máximo positivo cuantifica expansión media infinitesimal, pero una estimación finita debe complementarse con las condiciones topológicas correspondientes.

En Toolbox Chaos esta diferencia se aborda combinando *Series temporales*, *Bifurcación*, *Lyapunov*, *Espectro* y pruebas de refinamiento. La interfaz organiza una cadena de evidencia, orienta los diagnósticos requeridos y permite localizar contradicciones.

Así, una órbita logística para $r = 4$ puede mostrar sensibilidad, banda ancha y un diagrama de bifurcación denso. La afirmación prudente es que los indicadores son consistentes con dinámica caótica en el régimen y resolución estudiados. Una demostración matemática usaría propiedades del mapa y de su conjunto invariante junto con el análisis de los cálculos en punto flotante.

Límite de interpretación

La identificación de caos, estabilidad o existencia de un atractor requiere diagnósticos convergentes. “Acotado residual/no clasificado” es una clase operacional: significa que el algoritmo finito registró una trayectoria sin escape, equilibrio o periodicidad simple durante la ventana evaluada; el siguiente paso es aplicar diagnósticos específicos de caos.

La conclusión proporcionada consiste en reportar compatibilidad entre varios indicadores, junto con horizonte, resolución y pruebas de convergencia. Las conclusiones generales integran varios indicadores y se circunscriben a la región de parámetros examinada.

Indicadores de comportamiento periódico y caótico

Construya una tabla con cinco columnas: indicador, resultado, decisión numérica que lo afecta, prueba de refinamiento y conclusión permitida. Llénela para un caso aparentemente caótico y para un caso periódico. Busque al menos un indicador que por sí solo podría inducir a error.

¹⁹**Lectura complementaria.** Robert L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*, capítulos 7–12; Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, capítulos 1–3.

5 Bifurcaciones, cuencas y multestabilidad

Lectura complementaria²⁰

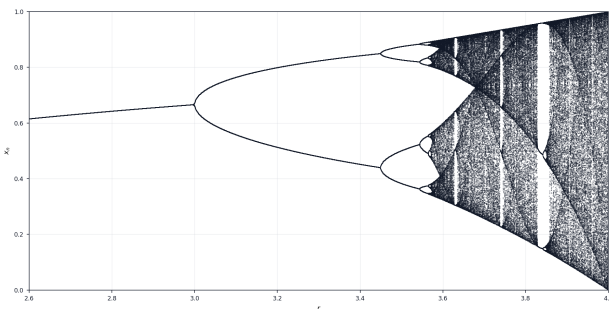
Un diagrama de bifurcación permite leer ramas, duplicaciones, ventanas y saltos, pero la estructura sólo es confiable si persiste al cambiar transitorio, malla y estrategia de barrido. Una bifurcación identifica el punto en que cambia el tipo de comportamiento. El diagrama comprime muchos experimentos: cada columna corresponde a un valor del parámetro y sólo conserva eventos asintóticos elegidos.

En términos matemáticos, una bifurcación ocurre cuando la dinámica de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \mu)$ o $\mathbf{x}_{n+1} = F(\mathbf{x}_n; \mu)$ cambia cualitativamente al cruzar μ_* . Para mapas, se suelen graficar valores tardíos x_n . Para flujos se registran máximos locales o cruces de una sección de Poincaré. Una sección Σ induce un mapa de retorno $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$, que convierte una órbita continua en una sucesión de eventos.

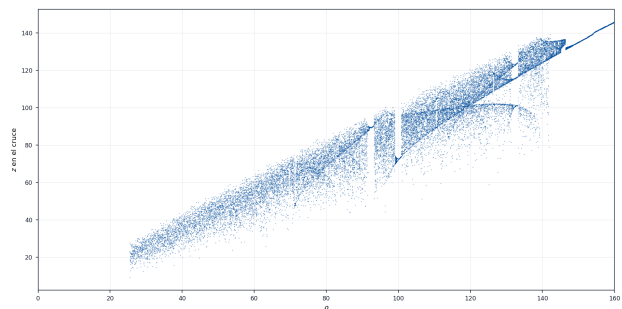
En una cascada de duplicación de período, los parámetros μ_n se aproximan a un límite y sus cocientes de escala convergen, para clases amplias de mapas unimodales, a la universalidad estudiada por Feigenbaum [5]. El mapa logístico es el ejemplo didáctico clásico [4].

Para construir el diagrama en Toolbox Chaos, en *Bifurcación* seleccione parámetro, variable observada, intervalo, número de parámetros, dt , transitorio, tiempo útil y máximo de cruces. La opción de continuación reutiliza el estado final anterior y ayuda a seguir ramas; un barrido independiente prueba la sensibilidad a condiciones iniciales. El botón *Calcular bifurcación* genera el conjunto de eventos que fundamenta la representación gráfica.

En el mapa logístico, por ejemplo, una rama indica un punto fijo; dos, un ciclo de período dos; sucesivos desdoblamientos forman una cascada. Las ventanas periódicas dentro de una nube densa requieren evaluar cada transición mediante el transitorio, la resolución y los diagnósticos pertinentes.



(a) Mapa logístico: valores tardíos por parámetro.



(b) Flujo de Lorenz: eventos de Poincaré o máximos.

Figura 4: Dos diagramas de bifurcación pueden parecer similares, aunque la observable representada y el mecanismo de muestreo sean distintos.

El diagrama permite localizar numéricamente un intervalo de cambio y formular una hipótesis sobre el tipo de bifurcación. La estimación precisa de μ_* requiere una malla suficiente, transitorios adecuados y repeticiones que separen una rama de un transitorio. La histéresis requiere barridos en ambas direcciones.

Como prueba práctica, calcule un diagrama con 200 valores y después refine sólo un intervalo de interés. Repita con el doble de transitorio y compare continuación contra reinicio independiente. Marque como “estructura confirmada”, “sensible” o “inconclusa” cada rama visible.

²⁰**Lectura complementaria.** Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, capítulos 3, 8 y 10; Tamás Tél y Márton Gruiz, *Chaotic Dynamics: An Introduction Based on Classical Mechanics*, capítulos 5–6.

5.1 Cuencas de atracción y fronteras

Una cuenca relaciona condición inicial y destino; su lectura distingue la multestabilidad del caos y revela el efecto de la resolución y el horizonte sobre las fronteras. Dos estados iniciales casi iguales pueden terminar en regímenes distintos. Una cuenca colorea el espacio inicial según el destino y se complementa con trayectorias para representar su evolución. Las fronteras suaves permiten cierta tolerancia experimental; las fronteras finas o fractales reducen la predictibilidad del estado final [6].

Formalmente, la cuenca de un atractor A_i es

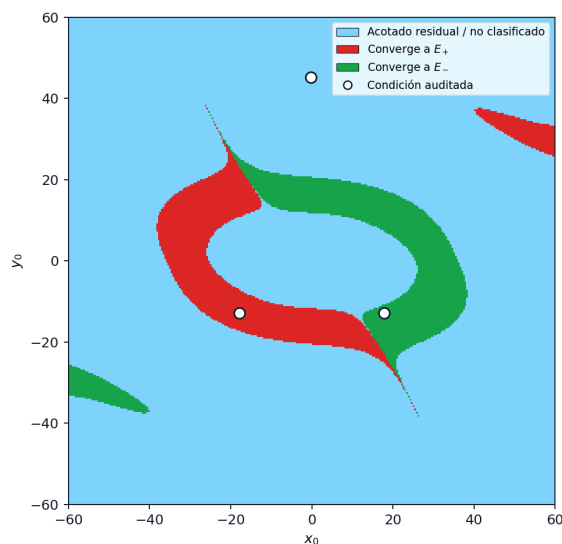
$$\mathcal{B}(A_i) = \{\mathbf{x}_0 : \text{dist}(\Phi_t(\mathbf{x}_0), A_i) \rightarrow 0\}.$$

Existe multestabilidad cuando, para los mismos parámetros, coexisten dos o más atractores con cuencas no vacías. Una frontera de cuenca separa destinos. Su estructura puede cuantificarse mediante exponentes de incertidumbre, medidas de extensión o entropía de cuenca [7, 8].

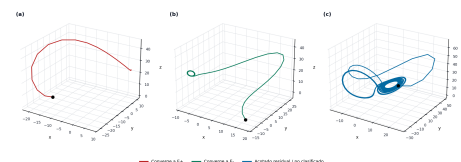
En una malla finita, el software implementa una clasificación operacional. Para cada condición inicial detecta escape, convergencia a un equilibrio, periodicidad simple o la clase acotada residual/no clasificada. Cambiar T , tolerancias o resolución puede cambiar la etiqueta.

Para calcularla en Toolbox Chaos, en *Cuenca de atracción* defina el rectángulo de (x_0, y_0) , el valor fijo z_0 , (N_x, N_y) , dt y tiempo total. Active *Superponer equilibrios* para relacionar geometría inicial y puntos fijos. Empiece con una malla pequeña y aumente primero el horizonte si hay muchas celdas residuales; luego refine espacialmente.

En una sección bidimensional de Lorenz, por ejemplo, los colores representan destinos detectados y categorías operativas de clasificación. Una región residual puede contener un transitorio largo, una órbita periódica pendiente de clasificación o dinámica irregular. Las trayectorias de puntos seleccionados ayudan a auditar la leyenda.



(a) Zonas de lectura y frontera en una sección de cuenca.



(b) Trayectorias que auditan destinos coloreados.

Figura 5: La cuenca y las órbitas responden preguntas complementarias: “desde dónde” y “hacia dónde/cómo”.

Límite de interpretación

La coexistencia visual sólo muestra que las condiciones iniciales ensayadas alcanzaron destinos distintos bajo el mismo conjunto de parámetros. La geometría global de las cuencas y la naturaleza de su frontera requieren muestreo dirigido, control de transitorios, refinamiento espacial y un

argumento acorde con la propiedad estudiada.

Con estas precauciones puede afirmarse coexistencia numérica de destinos para las condiciones y el contrato ensayados, y estimar fracciones de área de la sección. La descripción de toda la cuenca n -dimensional y de su fractalidad requiere análisis de escala y muestreo adicional a una sección 2D.

Refinamiento de cuencas y fronteras de clasificación

Calcule una cuenca en 60×60 y 120×120 . Seleccione diez puntos a ambos lados de una frontera y aumente el tiempo total. Registre cuántas etiquetas cambian. Interprete ese cambio como incertidumbre numérica antes de atribuirlo a fractalidad.

6 Lyapunov, análisis espectral y recurrencia

Lectura complementaria²¹

El espectro de Lyapunov describe tasas medias de expansión y contracción, pero su signo sólo se vuelve evidencia cuando la estimación muestra convergencia temporal. Para formar una imagen geométrica, imagine una esfera diminuta de condiciones iniciales: la dinámica la deforma en un elipsoide: algunos ejes crecen, otros decrecen. Los exponentes de Lyapunov son las tasas logarítmicas promedio de esos ejes.

Para una perturbación tangente, esta idea se expresa como

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|D\Phi_t(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

El espectro ordenado $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ resume direcciones. En un flujo autónomo típico, un exponente asociado a la dirección del flujo es cero. Un máximo positivo es evidencia fuerte de sensibilidad promedio, bajo un cálculo convergente y en el régimen correcto.

El algoritmo de Benettin integra el sistema variacional

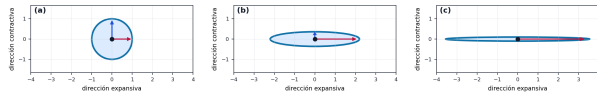
$$\dot{Y} = J(\mathbf{x}(t))Y$$

y aplica factorizaciones $Y = QR$ periódicas. Las sumas de $\log |R_{ii}|$ evitan que todas las direcciones colapsen sobre la más expansiva [9, 10].

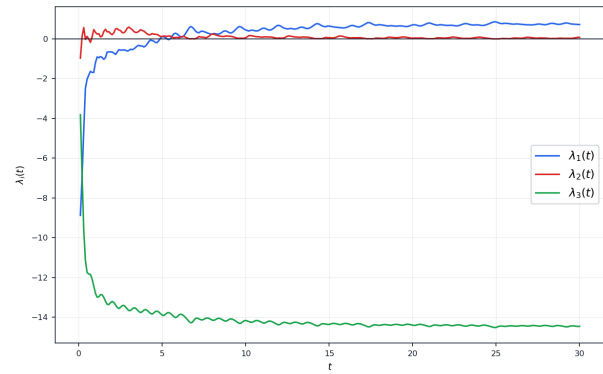
El cálculo se configura en *Lyapunov* mediante *dt*, tiempo de quemado, tiempo final y *QR cada N pasos*; después pulse *Calcular exponentes de Lyapunov*. La vista de convergencia es tan importante como los valores finales. La implementación visible usa RK4 fijo para estado y sistema variacional en flujos ODE tridimensionales.

Para Lorenz clásico, por ejemplo, se espera un patrón aproximado $(+, 0, -)$. La primera curva cruce cero al inicio: debe estabilizarse al aumentar el horizonte. La suma de exponentes puede contrastarse con la contracción promedio del volumen, pero la igualdad exacta depende de hipótesis y del error numérico.

²¹**Lectura complementaria.** Robert C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, capítulos 9–10 y apéndice A; Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, secciones 3.1–3.5, 4.5–4.7 y 5.2.



(a) Separación local de perturbaciones.



(b) Estimaciones finitas y su convergencia.

Figura 6: El concepto geométrico y la estimación temporal deben leerse juntos.

Sólo entonces puede reportarse un espectro finito que se estabiliza dentro de tolerancias y es estable frente a dt , tiempo y frecuencia QR. El límite asintótico requiere varios horizontes de integración, y un máximo positivo durante el transitorio se contrasta con la dinámica posterior antes de caracterizar un atractor caótico.

Convergencia del espectro de Lyapunov

Calcule $\lambda_i(t)$ con dos tiempos finales y dos pasos. Construya una tabla con el valor al final y la oscilación en el último 20 % del intervalo. Proponga una cifra significativa justificada; cuando las curvas carecen de una meseta, reporte el estado “no convergente” y documente el patrón observado.

6.1 Espectro de amplitud y PSD de Welch

El análisis frecuencial complementa esa lectura al relacionar periodicidad y contenido en frecuencia, distinguir amplitud de densidad de potencia y evaluar una banda ancha con diagnósticos de caos adicionales. Una serie temporal puede verse como suma de oscilaciones. La transformada de Fourier reorganiza la información por frecuencia. Una señal periódica ideal concentra energía en líneas; una señal irregular reparte energía, pero el ruido, el transitorio y una ventana corta también ensanchan el espectro.

Para muestras $x_n = x(n\Delta t)$, la transformada discreta es

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i k n / N}, \quad f_k = \frac{k}{N\Delta t}.$$

La resolución aproximada es $\Delta f = 1/(N\Delta t)$ y la frecuencia de Nyquist es $f_N = 1/(2\Delta t)$. Restar la media y usar una ventana reduce fuga espectral, pero modifica amplitudes y anchuras.

Welch divide la señal en segmentos superpuestos, calcula periodogramas modificados y los promedia. Reduce varianza a cambio de resolución frecuencial [11]. La PSD tiene unidades de la variable al cuadrado por unidad de frecuencia; el espectro de amplitud conserva otra normalización y responde una pregunta diferente.

En la pestaña *Espectro*, elija *PSD de Welch (recomendado)* o *Espectro de amplitud*, defina el transitorio y, si es necesario, límites de frecuencia. Pulse *Calcular FFT/PSD*. Use *Usar última trayectoria* para que las tres variables provengan exactamente del mismo cálculo.

En Lorenz, $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ presentan espectros propios porque observan la misma dinámica mediante coordenadas distintas. Una frecuencia dominante puede reflejar el tiempo medio de giro de un lóbulo dentro de una señal irregular.

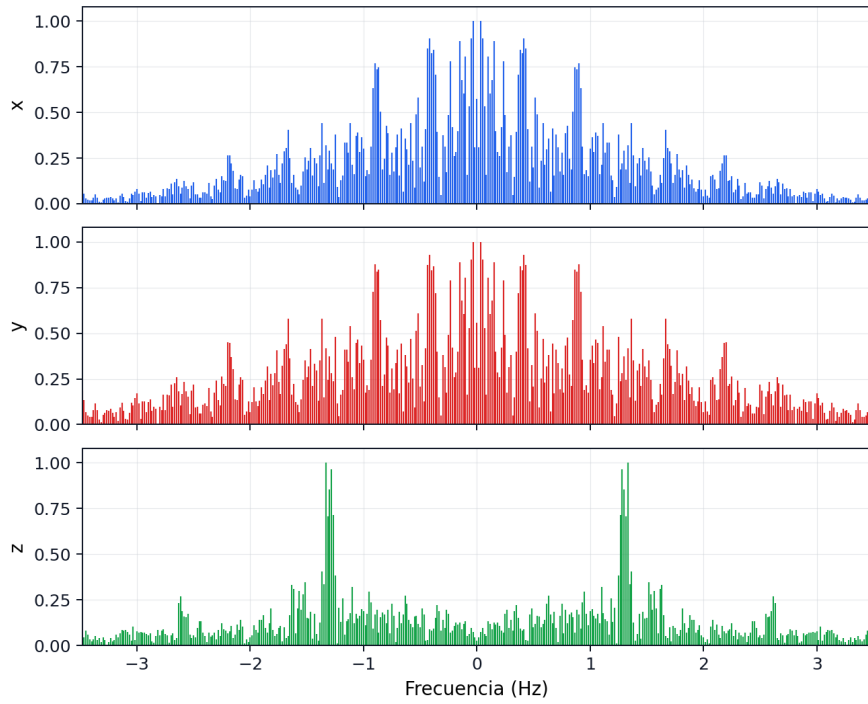


Figura 7: Espectro normalizado centrado para las variables de Lorenz. La comparación entre componentes debe conservar el mismo paso, horizonte y transitorio.

El espectro permite localizar periodicidad dominante, armónicos y distribución frecuencial bajo el muestreo elegido. La distinción entre caos determinista y ruido requiere diagnósticos adicionales a una banda ancha; la identificación de un ciclo límite exige más evidencia que un pico espectral.

Como comprobación, compare una órbita periódica y Lorenz con igual Δt y duración útil. Repita Welch con segmentos más cortos y más largos. Anote qué gana en suavidad y qué pierde en resolución. Verifique que ningún pico interpretado esté por encima de Nyquist.

6.2 Secciones de Poincaré, dimensión de correlación y recurrencia

Tres herramientas adicionales resumen geometría y repetición: la sección de Poincaré, la dimensión de correlación y la matriz de recurrencia. Una trayectoria larga puede ser difícil de leer. Una sección registra sólo cruces; la dimensión pregunta cómo crece el número de pares cercanos al cambiar la escala; la recurrencia marca cuándo el sistema vuelve cerca de un estado previo. Las tres herramientas comprimen información, pero cada una puede crear artefactos si se eligen mal el umbral o la escala.

Una sección de Poincaré Σ registra intersecciones transversales de la órbita. Un ciclo límite produce un punto fijo del mapa de retorno; dinámicas más complejas producen conjuntos de cruces.

Para N estados, la suma de correlación

$$C(r) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i < j} \mathbf{1}(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| < r)$$

puede obedecer $C(r) \propto r^{D_2}$ en una región de escala, y entonces

$$D_2 \approx \frac{d \log C(r)}{d \log r}.$$

La estimación de Grassberger–Procaccia requiere una meseta de pendiente y suficientes datos; la validación selecciona una meseta de pendiente y documenta su intervalo [12].

Una matriz de recurrencia se define por

$$R_{ij} = \mathbf{1}(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \leq \varepsilon).$$

Sus diagonales y bloques muestran retornos y cambios de régimen, con fuerte dependencia del umbral y del muestreo [13].

En la GUI actual, *Bifurcación* puede construir eventos de Poincaré o máximos en flujos compatibles. La dimensión de correlación y las matrices de recurrencia se se presentan aquí como una ampliación teórica externa: estos cálculos se realizan con una serie de estados obtenida o generada fuera de estas pestañas. Para aplicarlos, el equipo investigador documenta por separado el procedimiento empleado y verifica la ruta de exportación en la versión instalada.

La figura siguiente corta Lorenz con un plano. Los puntos corresponden a eventos de una misma órbita. Un plano transversal representa el retorno con precisión y exige indicar su orientación y sentido de cruce.

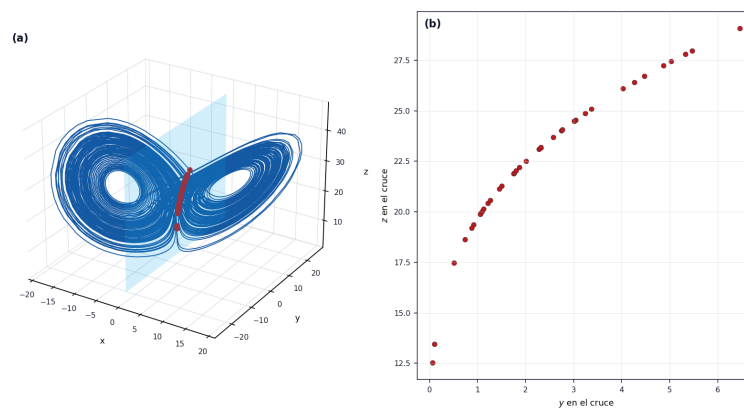


Figura 8: Sección de Poincaré producida a partir de una trayectoria de Lorenz.

Con datos externos adecuadamente documentados puede estimarse una ley de escala en un intervalo explícito o describirse recurrencia para un umbral declarado. La dimensión fractal requiere varios ajustes y las matrices comparadas deben usar normalizaciones compatibles. Las series cortas, sobremuestreadas o ruidosas exigen controles de sesgo.

Como ampliación, construya una sección usando dos planos diferentes y compare el número y distribución de cruces. Para dimensión, grafique $\log C(r)$ contra $\log r$ y marque regiones dominadas por saturación y escasez de pares. Una meseta estable sustenta la estimación; su ausencia se documenta como evidencia adicional requerida.

7 Sistemas fraccionarios y criterio de Matignon

Lectura complementaria²²

La derivada de Caputo introduce memoria y el criterio angular de Matignon caracteriza una clase de sistemas lineales de orden común; ambos conceptos requieren una adaptación explícita de los diagnósticos de orden entero. En una ecuación ordinaria, la derivada local resume el cambio inmediato. En una ecuación fraccionaria, el estado actual depende de una historia ponderada. El orden q modifica el modelo y la noción de estado necesaria para predecir el futuro; su papel corresponde a una memoria ponderada, distinta del ajuste del paso numérico.

²²**Lectura complementaria.** Como contexto de estabilidad y linealización, Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, capítulos 7–10; para el operador y el criterio fraccionario, véanse las referencias primarias de Caputo y Matignon al final del manual.

Para $0 < q < 1$, la derivada de Caputo puede escribirse

$${}^C D_t^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^t \frac{x'(\tau)}{(t-\tau)^q} d\tau.$$

El núcleo $(t-\tau)^{-q}$ conserva memoria de toda la historia. En el límite $q \rightarrow 1$ se recupera la derivada ordinaria bajo condiciones apropiadas. La forma de Caputo facilita condiciones iniciales expresadas con valores ordinarios [14].

Para el sistema lineal conmensurable

$${}^C D_t^q \mathbf{x} = A\mathbf{x}, \quad 0 < q < 1,$$

el criterio de Matignon establece estabilidad asintótica si y sólo si

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{q\pi}{2} \quad \text{para todo } \lambda_i \in \sigma(A)$$

en el caso considerado [15]. Para $q = 1$ la frontera corresponde al eje imaginario. Para $q = 0.5$, el sector excluido alrededor del eje real positivo tiene semiancho $\pi/4$: el criterio se evalúa mediante el argumento de cada autovalor.

El plano de *Autovalores* ayuda a ubicar λ_i , pero la interpretación por semiplanos es la de orden entero. Para un cálculo fraccionario debe declararse el operador, orden común o no común, historia, método y criterio aplicable. Las funciones fraccionarias del núcleo matemático pueden utilizarse desde código cuando estén expuestas por la versión instalada; cada diagnóstico tangente entero requiere confirmar su extensión hereditaria validada.

Para ver la diferencia, considere un autovalor $\lambda = 1 + 2i$, cuyo argumento es aproximadamente 63.4° . Para $q = 1$, su parte real positiva lo hace inestable. Para $q = 0.5$, el umbral de Matignon es 45° , de modo que satisface el criterio angular del sistema lineal conmensurable. Este contraste exige usar la frontera angular correspondiente al plano fraccionario. El ejemplo es exclusivamente lineal y local: clasifica la estabilidad de la linealización bajo las hipótesis de Matignon; la estabilidad global del sistema no lineal y la existencia de un atractor requieren evidencia adicional.

Contrato mínimo para un resultado fraccionario

Reporte: definición de derivada, orden u órdenes, condición/historia inicial, método de convolución o integración, paso, horizonte, tratamiento de memoria, tolerancias y prueba de refinamiento. Dos métodos con nombres parecidos pueden discretizar operadores diferentes.

En consecuencia, puede aplicarse el criterio de Matignon a la linealización conmensurable bajo sus hipótesis. Su aplicación requiere adaptación para órdenes no conmensurables, sistemas no lineales globales o aproximaciones que cambian el operador. Una trayectoria fraccionaria aparentemente caótica requiere diagnósticos específicos de caos y estabilidad global.

Criterio de Matignon para distintos órdenes fraccionarios

Dibuje los rayos $\arg \lambda = \pm q\pi/2$ para $q = 1, 0.8$ y 0.5 . Clasifique los autovalores $1 + 2i$, $-1 + i$ y $2 + 0.5i$. Después explique por qué disminuir q cambia la región estable con la matriz A fija.

8 Geometría, topología y memoria en sistemas dinámicos

Objetivo de aprendizaje

Construir una lectura universitaria del sistema dinámico como objeto geométrico: identificar el espacio donde vive, pasar del problema de valor inicial al flujo, reconocer invariancia y atracción, estudiar la deformación local de perturbaciones y reducir órbitas periódicas a mapas de retorno. La última parte explica qué cambia cuando la evolución conserva memoria mediante una derivada de Caputo y deriva el esquema ABM-PECE desde la ecuación integral de Volterra.

Este capítulo reúne ideas que suelen estudiarse en cursos distintos. La topología aporta el vocabulario de vecindad, frontera, continuidad y compacidad. La geometría diferencial permite interpretar un campo como una dirección tangente en cada estado. La teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales organiza órbitas, conjuntos límite, variedades invariantes y retornos. El análisis numérico convierte esas construcciones en experimentos y conserva sus hipótesis explícitas. El propósito es aprender a moverse entre esos cuatro niveles con sus funciones diferenciadas.

La secuencia de trabajo será siempre la misma. Primero se declara el espacio de fases y el modelo; después se obtiene una propiedad analítica; luego se decide qué gráfica puede hacerla visible; finalmente se delimita el alcance de la evidencia disponible. Esta disciplina vincula cada figura con las conclusiones que su método sostiene.

8.1 Topología del espacio de fases

Abiertos, vecindades y continuidad. Una topología sobre un conjunto X es una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos, llamados abiertos, que contiene a $\emptyset$ y a X , es cerrada bajo uniones arbitrarias y bajo intersecciones finitas. Una vecindad de x es cualquier conjunto que contiene un abierto al que pertenece x . Esta definición parece abstracta, pero responde una pregunta concreta: ¿qué significa que dos estados sean próximos y que una solución dependa continuamente de su condición inicial?

En $\mathbb{R}^n$ se usa normalmente la topología inducida por la distancia euclídea

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2}. \quad (1)$$

Una función $h : X \rightarrow Y$ es continua si la preimagen de todo abierto de Y es abierta en X . La formulación por preimágenes no depende de coordenadas particulares y por eso resulta adecuada al comparar modelos escritos con variables distintas.

Interior, clausura y frontera. Para $A \subset X$, el interior $\text{int } A$ reúne los puntos que poseen una vecindad contenida en A ; la clausura $\overline{A}$ añade todos sus puntos de acumulación. La frontera es

$$\partial A = \overline{A} \setminus \text{int } A. \quad (2)$$

Toda vecindad de un punto de ∂A encuentra puntos de A y de su complemento. Una frontera calculada sobre una malla sólo aproxima esta definición: el último píxel de un color sólo registra una aproximación del conjunto matemático ∂A .

Compacidad y conexidad. Un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado. Esta equivalencia no se traslada automáticamente a espacios generales, pero en el curso será una herramienta frecuente: permite extraer subsucesiones convergentes y evita que una órbita salga a distancias arbitrarias dentro del conjunto considerado. Un conjunto conexo no puede separarse en dos abiertos relativos, disjuntos

y no vacíos. Compacidad controla la posibilidad de tomar límites; conexidad controla la posibilidad de separar el objeto.

Producto y cociente. Algunos espacios de fases adoptan una geometría distinta de $\mathbb{R}^n$. En un péndulo, el ángulo satisface $\theta \sim \theta + 2\pi k$; por ello el estado natural es $S^1 \times \mathbb{R}$, no un rectángulo con dos bordes físicos diferentes. Una distancia angular compatible es

$$d_{S^1}(\theta_1, \theta_2) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |\theta_1 - \theta_2 + 2\pi k|. \quad (3)$$

Si una curva cruza el borde derecho de una gráfica angular y reaparece en el izquierdo, no ha saltado en el espacio de fases: la discontinuidad pertenece a la carta usada para dibujarla. Esta distinción es decisiva al interpretar trayectorias, retornos y distancias.

Práctica reproducible: una frontera exacta y su aproximación

En *Crear sistema* defina las variables x, y, z , sin parámetros, con ecuaciones $\dot{x} = x^3$, $\dot{y} = -y$ y $\dot{z} = -z$. Use RK4, $h = 0.01$, $T = 20$ y los estados iniciales $(0.25, 0.5, 0.2)$, $(-0.25, 0.5, 0.2)$, $(0.01, 0.5, 0.2)$ y $(-0.01, 0.5, 0.2)$. Guarde las series y los retratos con nombres que incluyan el signo de x_0 . Antes de simular, demuestre con una línea de fase que $x = 0$ es la frontera entre los destinos $x = 1$ y $x = -1$. Después explique por qué cuatro trayectorias ilustran esa conclusión, pero no la sustituyen.

Lectura topológica de las gráficas. Una serie temporal informa cómo se recorre el estado; un retrato de fase informa qué región se visita; una gráfica de condiciones iniciales informa qué destino se asignó a cada punto. Ninguna vista contiene por sí sola las otras dos. Si una separación parece brusca, hay que preguntar si procede de la dinámica, de la identificación de coordenadas, de una tolerancia del clasificador o de la resolución elegida.

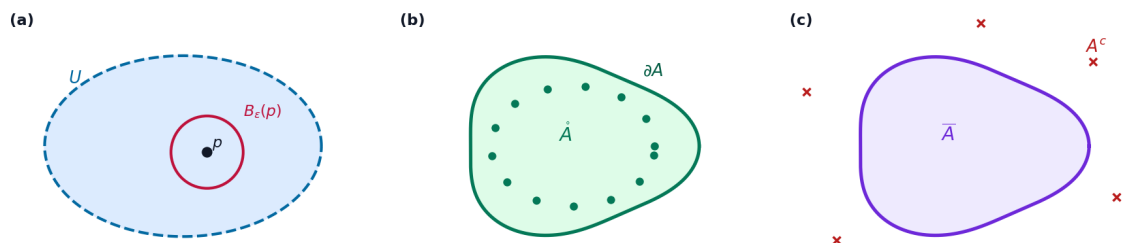


Figura 9: Lectura mínima de un conjunto en el espacio de fases: (a) una vecindad abierta alrededor de un punto, (b) interior y frontera, y (c) clausura frente al complemento. El trazo de la frontera es información geométrica; la pertenencia y la apertura son propiedades del conjunto y de la topología elegida.

Lectura complementaria²³

8.2 Problema de valor inicial y flujo

Considérese una ecuación autónoma

²³**Lectura complementaria.** Eduardo Nahmad-Achar, *Topología y geometría diferencial con aplicaciones a la física*, capítulos sobre espacios topológicos, variedades y campos; Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, capítulos 1–3.

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Si f es localmente Lipschitz, el teorema de Picard–Lindelöf proporciona una solución local única. La palabra *local* importa: un campo polinómico puede tener solución sólo hasta un tiempo finito si no se dispone de una cota que impida el crecimiento sin límite. Cuando la solución existe en el intervalo requerido se define

$$\Phi_t(x_0) = x(t; x_0). \quad (5)$$

La autonomía y la unicidad producen la ley de composición

$$\Phi_0 = \text{id}, \quad \Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s. \quad (6)$$

La derivación es breve. Las funciones $u(t) = \Phi_{t+s}(x_0)$ y $v(t) = \Phi_t(\Phi_s(x_0))$ resuelven la misma ecuación y comparten el dato inicial $u(0) = v(0) = \Phi_s(x_0)$. Por unicidad, coinciden. Si cada solución puede prolongarse hacia tiempos positivos y negativos, Φ_t es un flujo; si sólo se dispone de $t \geq 0$, se habla de semiflujo.

Órbita e invariancia. La órbita de x_0 es el conjunto de estados visitados,

$$\mathcal{O}(x_0) = \{\Phi_t(x_0) : t \in I_{x_0}\}. \quad (7)$$

Un conjunto A es positivamente invariante si $\Phi_t(A) \subseteq A$ para todo $t \geq 0$. Es invariante si la igualdad se conserva para todo tiempo admisible. La invariancia es una afirmación sobre todas las trayectorias que comienzan en A , no una impresión obtenida de una curva dibujada dentro de él.

Para una región $N = \{x : h(x) \leq 0\}$ con frontera regular, el signo de la derivada de Lie

$$L_f h(x) = \nabla h(x)^\top f(x) \quad (8)$$

indica si el campo entra o sale. Si $L_f h < 0$ en ∂N , el campo apunta estrictamente hacia el interior y N es positivamente invariante. Una integral promedio negativa sobre la frontera requiere controlar el signo punto por punto o usar un argumento global distinto.

Ejemplo resuelto: contracción anisótropa. Para

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -2y, \quad (9)$$

la solución es

$$\Phi_t(x_0, y_0) = (e^{-t}x_0, e^{-2t}y_0). \quad (10)$$

Cada eje y cada cuadrante cerrado son positivamente invariantes. Las órbitas se aproximan al origen, pero no lo hacen a la misma velocidad: la componente y pierde una fracción fija más rápido. En un retrato de fase se obtiene $y = Cx^2$ dentro de cada región de signo constante. La geometría de la curva elimina el tiempo; la serie temporal conserva las tasas.

Ejercicio con pista: flujo e invariancia

Para (9), compruebe directamente (6). Después use $V(x, y) = x^2 + y^2$ y calcule $\dot{V}$. ¿Qué discos son positivamente invariantes? **Pista:** $\dot{V} = -2x^2 - 4y^2$; compare el signo en cada circunferencia y no confunda invariancia del disco con invariancia de cada circunferencia.

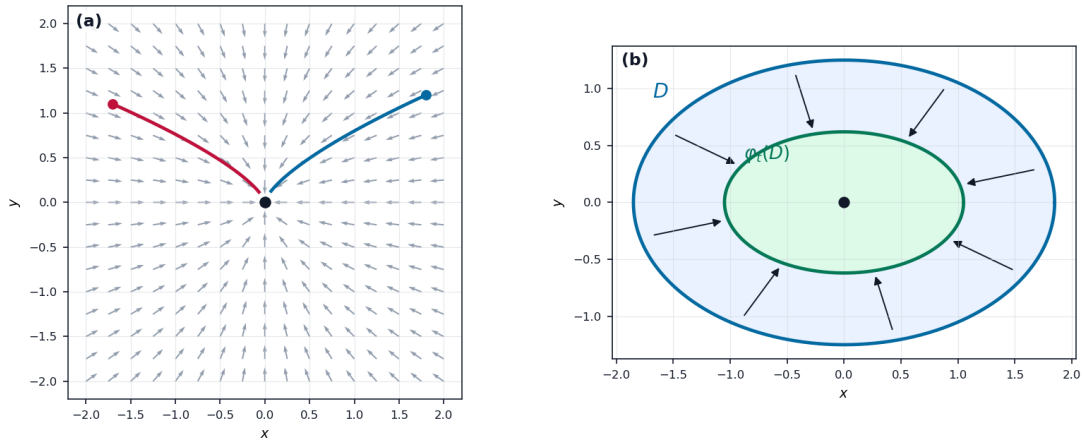


Figura 10: Dos lecturas complementarias del flujo contractivo: (a) órbitas orientadas por el campo y (b) transporte de una región D hacia $\varphi_t(D)$. Que la imagen quede contenida en D expresa invariancia positiva de la región, no invariancia de cada curva dibujada en su interior.

Lectura complementaria²⁴

8.3 Conjuntos límite, atracción y regiones atrapantes

Una trayectoria larga puede continuar moviéndose aunque deje de visitar regiones nuevas. El conjunto ω -límite registra lo que permanece accesible a tiempos arbitrariamente grandes:

$$\omega(x) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\Phi_t(x) : t \geq T\}}. \quad (11)$$

Si la semiórbita positiva está contenida en un compacto, $\omega(x)$ no es vacío, es compacto y es positivamente invariante. El descarte de un transitorio en el software aproxima la operación $t \geq T$, pero una ventana finita no ejecuta la intersección para todos los T .

Atracción y cuenca. Sea A un compacto invariante. Se dice que atrae a x si

$$\text{dist}(\Phi_t(x), A) \longrightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty). \quad (12)$$

La cuenca correspondiente es

$$\mathcal{B}(A) = \{x : \text{dist}(\Phi_t(x), A) \rightarrow 0\}. \quad (13)$$

Esta definición separa el conjunto asintótico de los estados que llegan a él. Dos atractores geoméricamente parecidos pueden tener cuencas muy distintas; una cuenca extensa tampoco vuelve más compleja la dinámica que ocurre dentro del atractor.

Región atrapante. Un compacto N es atrapante si existe $t_* > 0$ tal que $\Phi_{t_*}(N) \subset \text{int } N$. El conjunto

$$A_N = \bigcap_{t \geq 0} \Phi_t(N) \quad (14)$$

²⁴**Lectura complementaria.** Jessica Angélica Jaurez Rosas, Laura Ortiz Bobadilla, Jesús Alberto Palma Márquez y Ernesto Rosales González, *Teoría geométrica de ecuaciones diferenciales I*, capítulos sobre existencia, unicidad y flujo; Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, capítulos 2 y 5.

es el máximo conjunto invariante que permanece dentro de N , siempre que el flujo y la compacidad permitan esta construcción. La región atrapante brinda una cota global; requiere diagnósticos adicionales para clasificar A_N como equilibrio, ciclo o conjunto más complicado.

Ejemplo resuelto: oscilación radial autosostenida. Considérese

$$\dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2). \quad (15)$$

Con $r^2 = x^2 + y^2$ y $\theta = \text{atan2}(y, x)$,

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1. \quad (16)$$

Para $0 < a < 1 < b$, en $r = a$ se tiene $\dot{r} > 0$ y en $r = b$ se tiene $\dot{r} < 0$. El anillo $a \leq r \leq b$ es atrapante. Toda condición con $r_0 > 0$ se aproxima a la circunferencia $r = 1$, mientras el origen permanece como equilibrio inestable. El retrato muestra una espiral hacia una curva cerrada; la serie temporal muestra una oscilación cuya amplitud se estabiliza; la gráfica de $r(t)$ revela de forma más directa la atracción radial.

Práctica reproducible: región atrapante y observable adecuada

Introduzca (15) en *Crear sistema* con variables x, y , RK4, $h = 0.01$ y $T = 25$. Simule desde $(0.2, 0)$, $(0.8, 0)$, $(1.4, 0)$ y $(2, 0)$. Use *Retratos 2D* y *Series temporales*; exporte los datos y añada la columna $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Compare $r(t)$ con la predicción de signos de (16). Repita con $h/2$ y registre el máximo de $|r(t) - 1|$ en la última cuarta parte de la simulación.

Lectura de una cuenca calculada. Cada celda representa una condición inicial y una clasificación obtenida con un horizonte, un paso y tolerancias. Una franja de celdas sin clasificación estable puede deberse a una frontera fina, a transitorios largos o a un criterio demasiado rígido. Antes de describir geometría, conviene seleccionar puntos a ambos lados de la franja, duplicar el horizonte y refinar la malla localmente.

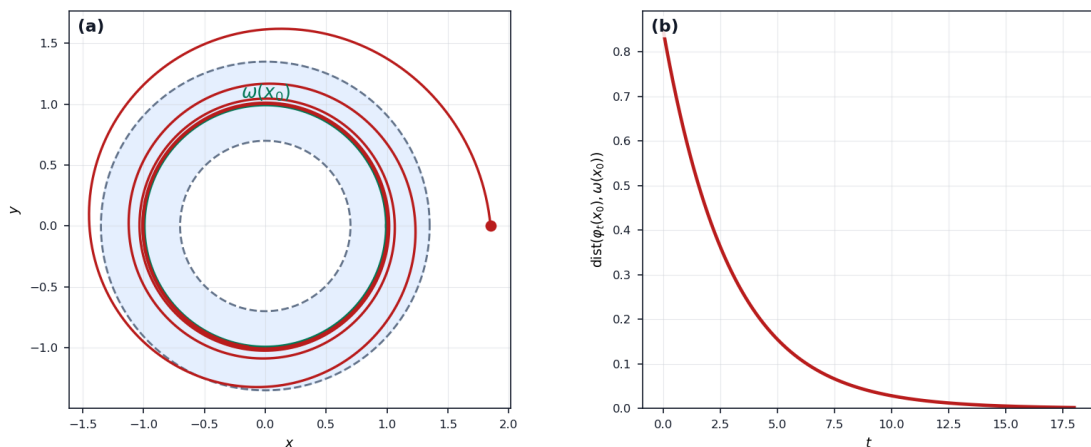


Figura 11: Región atrapante y conjunto ω -límite del ejemplo radial: (a) una órbita entra al anillo y se aproxima al ciclo $r = 1$; (b) la distancia al conjunto límite decrece sin que la trayectoria converja a un punto fijo. La segunda vista evita confundir atracción hacia un conjunto con convergencia de cada coordenada.

Lectura complementaria²⁵

²⁵**Lectura complementaria.** Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to*

8.4 Conjugación topológica y equivalencia orbital

Dos ecuaciones escritas de forma distinta pueden representar la misma organización de órbitas. La noción precisa depende de cuánto se desea conservar.

Conjugación. Los flujos Φ_t sobre X y Ψ_t sobre Y son topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que

$$h \circ \Phi_t = \Psi_t \circ h \quad \text{para todo } t. \quad (17)$$

La conjugación conserva el reloj: estados correspondientes se observan en el mismo tiempo. Transporta equilibrios, periodicidad, invariancia y estructura de conjuntos límite. No conserva longitudes, ángulos ni tasas expresadas en una métrica arbitraria.

Si h es un difeomorfismo y $y = h(x)$, la regla de la cadena da el campo transformado

$$g(y) = Dh(h^{-1}(y))f(h^{-1}(y)). \quad (18)$$

El factor Dh es esencial. Cambiar sólo el nombre de las variables no transporta el campo.

Equivalencia orbital. Si se permite una reparametrización creciente del tiempo, basta que h lleve órbitas orientadas en órbitas orientadas. Multiplicar el campo por una función positiva $\alpha(x)$,

$$\dot{x} = \alpha(x)f(x), \quad \alpha(x) > 0, \quad (19)$$

conserva las curvas integrales orientadas, pero cambia la rapidez con que se recorren. Por eso la equivalencia orbital no conserva periodos ni exponentes por unidad de tiempo.

Ejemplo de conjugación lineal. Para $\dot{x} = -x$, la solución es $x(t) = e^{-t}x_0$. Tome $h(x) = x^3$, homeomorfismo de $\mathbb{R}$. Entonces

$$y(t) = h(x(t)) = e^{-3t}y_0, \quad \dot{y} = -3y. \quad (20)$$

Los dos flujos son conjugados por h : tienen un equilibrio globalmente atractivo y la misma organización de semiórbitas. Sus tasas lineales son diferentes. El ejemplo advierte que una tasa numérica se presenta con su métrica y sus unidades, en vez de como invariante topológico.

Ejercicio con pista: transporte de una región

Sea $x = Tz + c$, con T invertible. Demuestre que la bola $\|x - x_e\|_2 \leq r$ se transforma en $(z - z_e)^T T^T T (z - z_e) \leq r^2$. Explique por qué una malla cuadrada en las coordenadas z no representa en general una malla cuadrada en x . **Pista:** sustituya $x - x_e = T(z - z_e)$ antes de elevar la norma al cuadrado.

Interpretación de gráficas comparadas. Dos retratos conjugados pueden verse estirados, inclinados o curvados. Lo importante es si conservan la correspondencia entre órbitas, equilibrios y conexiones. Si además se comparan series temporales, hay que aclarar si el reloj se conservó. Superponer curvas sin transportar coordenadas y tiempo mezcla dos preguntas distintas.

Dynamical Systems, secciones sobre conjuntos límite, cuencas y fronteras; Tamás Tél y Márton Gruiz, *Chaotic Dynamics: An Introduction Based on Classical Mechanics*, capítulos sobre dinámica transitoria y cuencas.

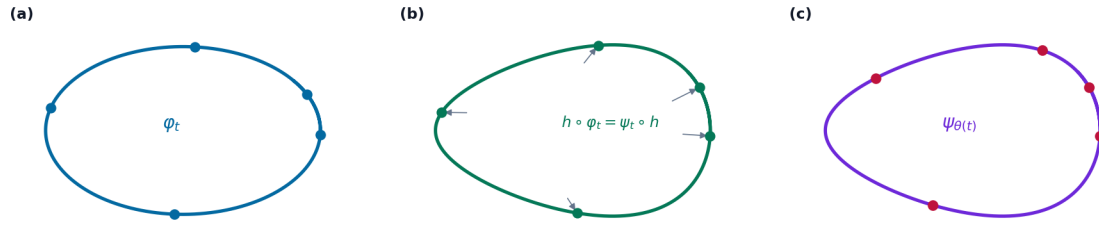


Figura 12: Correspondencias de órbitas: (a) una órbita de φ_t , (b) su deformación por un homeomorfismo h con las mismas marcas temporales y (c) la misma órbita geométrica con marcas redistribuidas por $\theta(t)$. El último panel ilustra por qué equivalencia orbital conserva el recorrido, pero no necesariamente el reloj.

Lectura complementaria²⁶

8.5 Variación, cambio de volumen y variedades invariantes

Una trayectoria describe la evolución de un estado. Para estudiar la evolución de una perturbación se deriva el flujo respecto de la condición inicial. Si $x(t) = \Phi_t(x_0)$ y f es diferenciable, la matriz fundamental

$$M(t) = D_{x_0} \Phi_t(x_0) \quad (21)$$

satisface la ecuación variacional

$$\dot{M}(t) = Df(x(t))M(t), \quad M(0) = I. \quad (22)$$

Una perturbación pequeña se aproxima por $\delta x(t) = M(t)\delta x_0$. Los valores singulares de $M(t)$ describen los ejes principales del elipsoide obtenido al deformar una esfera infinitesimal. Los exponentes finitos se calculan a partir de sus tasas logarítmicas, pero dependen del horizonte y del tratamiento numérico.

Fórmula de Liouville. La identidad de Jacobi para el determinante da

$$\frac{d}{dt} \det M = \det M \operatorname{tr}(M^{-1} \dot{M}). \quad (23)$$

Al sustituir (22), $M^{-1} \dot{M} = M^{-1} Df(x(t))M$, cuya traza es $\operatorname{tr} Df(x(t)) = \nabla \cdot f(x(t))$. Por integración,

$$\det M(t) = \exp \left(\int_0^t \nabla \cdot f(x(s)) ds \right). \quad (24)$$

La divergencia mide expansión instantánea de volumen. Divergencia negativa implica contracción de elementos de volumen a lo largo del flujo, pero no identifica por sí sola el conjunto al que llegan las trayectorias ni prueba que una región particular sea atrapante.

²⁶**Lectura complementaria.** Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, capítulos sobre equivalencia y linealización; John Guckenheimer y Philip Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, capítulo 1.

Equilibrio hiperbólico y variedades. Un equilibrio e es hiperbólico si $Df(e)$ no tiene valores propios con parte real cero. El espacio tangente se separa como

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u, \quad (25)$$

donde E^s corresponde a valores propios con parte real negativa y E^u a parte real positiva. El teorema de la variedad estable proporciona objetos no lineales $W_{\text{loc}}^s(e)$ y $W_{\text{loc}}^u(e)$ tangentes a esos subespacios en e . La linealización determina la tangencia local, no la forma global completa.

Ejemplo de variedad invariante curvada. Considérese

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y + x^2. \quad (26)$$

El origen tiene valores propios 1 y -1 . La recta $x = 0$ es la variedad estable. Para buscar la variedad inestable como $y = h(x) = ax^2$, se impone invariancia:

$$h'(x)\dot{x} = -h(x) + x^2. \quad (27)$$

Como $h'(x)\dot{x} = 2ax^2$ y $-h(x) + x^2 = (1 - a)x^2$, se obtiene $2a = 1 - a$ y, por tanto,

$$W_{\text{loc}}^u(0) : y = \frac{x^2}{3}. \quad (28)$$

El subespacio lineal E^u es el eje x ; la variedad verdadera se separa de él en orden cuadrático. Un retrato con escala amplia puede hacerlas parecer iguales.

Práctica reproducible: tangencia local y curvatura

Defina (26) en *Crear sistema*. Use RK4, $h = 0.002$, $T = 6$ y condiciones $(0.02, 0.02^2/3)$, $(-0.02, 0.02^2/3)$, $(0.02, 0)$ y $(0, 0.2)$. En *Retratos 2D*, superponga la parábola $y = x^2/3$ mediante datos exportados o puntos de referencia. Repita con $h/2$. Describa qué trayectorias permanecen cerca de la parábola y por qué la proximidad visual se complementa con la ecuación de invariancia.

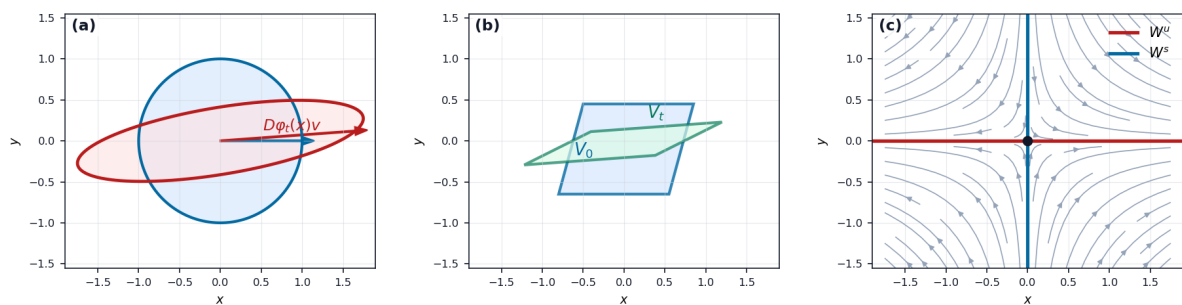


Figura 13: Tres objetos del sistema variacional: (a) transporte de una perturbación por $D\varphi_t$, (b) cambio de un elemento de área gobernado por el determinante y (c) direcciones estable e inestable de una silla. Una elipse o un paralelogramo son aproximaciones lineales locales; las variedades globales pueden curvarse.

Lectura complementaria²⁷

²⁷**Lectura complementaria.** Jessica Angélica Jaurez Rosas, Laura Ortiz Bobadilla, Jesús Alberto Palma Márquez y

8.6 Sección de Poincaré, monodromía y teoría de Floquet

Una órbita periódica de periodo T es una curva cerrada en el espacio de fases. Para estudiar su estabilidad se elige una hipersuperficie transversal

$$\Sigma = \{x : h(x) = 0\}, \quad \nabla h(x)^\top f(x) \neq 0 \quad (29)$$

en los cruces considerados. El primer retorno lleva $z \in \Sigma$ al siguiente cruce:

$$P(z) = \Phi_{\tau(z)}(z). \quad (30)$$

La órbita periódica se convierte en un punto fijo $P(p) = p$. Si los autovalores de $DP(p)$ tienen módulo menor que uno, el ciclo es localmente atractivo en direcciones transversales. Un conjunto de cruces apiñados sugiere un punto fijo; demostrarlo exige controlar el evento, el tiempo de retorno y el error.

Monodromía y multiplicadores. Sobre una solución periódica $\gamma(t)$, la ecuación variacional tiene coeficientes periódicos:

$$\dot{M}(t) = Df(\gamma(t))M(t), \quad M(0) = I. \quad (31)$$

La matriz $M(T)$ es la matriz de monodromía y sus autovalores son los multiplicadores de Floquet. En un flujo autónomo aparece un multiplicador 1 asociado al desplazamiento a lo largo de la órbita. Los multiplicadores restantes miden el comportamiento transversal y coinciden, bajo las identificaciones apropiadas, con los autovalores de $DP(p)$.

En un sistema plano, Liouville permite obtener el multiplicador transversal sin integrar toda la matriz:

$$\mu_\perp = \exp \left(\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt \right). \quad (32)$$

Ejemplo de multiplicadores de Floquet. En (15), el ciclo $r = 1$ tiene periodo $T = 2\pi$. Si $r = 1 + \eta$, entonces

$$\dot{\eta} = \frac{d}{dr}[r(1 - r^2)] \Big|_{r=1} \eta + O(\eta^2) = -2\eta + O(\eta^2). \quad (33)$$

Después de una vuelta, $\eta(T) \simeq e^{-4\pi}\eta(0)$; por tanto, $\mu_\perp = e^{-4\pi}$ y el ciclo es fuertemente atractivo en dirección radial. La curva cerrada del retrato no muestra por sí sola ese número: hace falta comparar retornos o resolver la variación.

Práctica reproducible: construir un retorno desde datos

Use la trayectoria de (15) con $(x_0, y_0) = (1.4, 0.1)$, RK4, $h = 0.005$ y $T = 30$. Exporte el CSV. Detecte cruces de $y < 0$ a $y \geq 0$ con $x > 0$ e interpole linealmente el valor de x en cada cruce. Construya x_{k+1} contra x_k y compare $|x_k - 1|$ entre vueltas consecutivas. Repita con $h/2$. Informe el cociente tardío y compárelo con $e^{-4\pi}$, señalando la limitación de la interpolación de eventos.

Lectura de la gráfica de retorno. La diagonal $P(z) = z$ permite localizar puntos fijos. La pendiente indica estabilidad en un mapa escalar: $|P'(z^*)| < 1$ atrae y $|P'(z^*)| > 1$ repele. Una nube gruesa puede proceder de dinámica compleja, de una sección mal definida, de cruces tangenciales o de

Ernesto Rosales González, *Teoría geométrica de ecuaciones diferenciales II*, secciones sobre primera variación y variedades invariantes; Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, capítulo 6.

muestreo insuficiente. Antes de interpretarla, deben revisarse orientación, transitorio y refinamiento del instante de cruce.

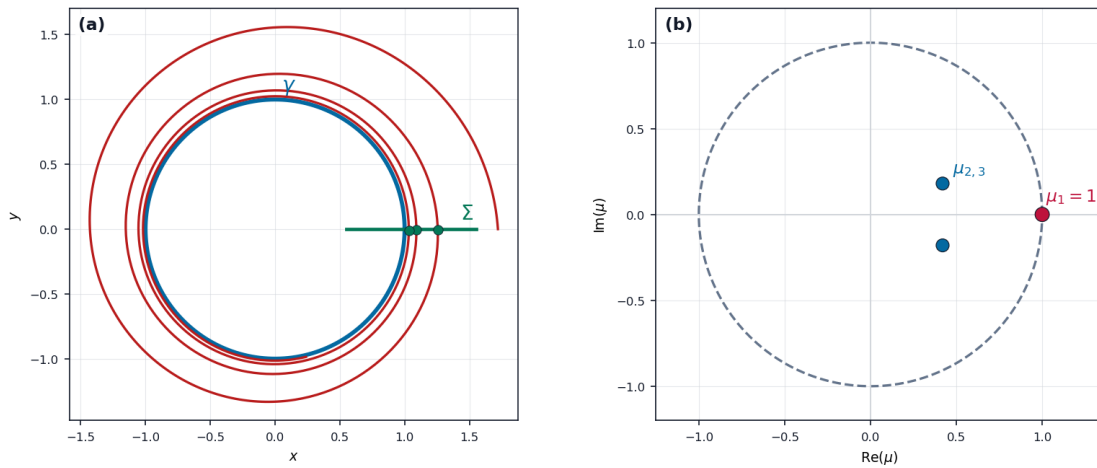


Figura 14: Geometría de retorno y estabilidad orbital: (a) una sección transversal Σ reduce el ciclo γ a iteraciones discretas; (b) los multiplicadores de Floquet se leen respecto del círculo unidad. El multiplicador trivial $\mu_1 = 1$ corresponde al desplazamiento de fase y no decide la estabilidad transversal.

Lectura complementaria²⁸

8.7 Grado, puntos fijos y existencia

Los métodos topológicos de existencia no buscan necesariamente una fórmula cerrada. Transforman el problema en un cero o un punto fijo y usan continuidad, compacidad y comportamiento en la frontera para demostrar que el objeto debe existir.

Contracción. En un espacio métrico completo, una aplicación T es contractiva si existe $0 < L < 1$ tal que

$$d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y). \quad (34)$$

El teorema de Banach garantiza un único punto fijo y la convergencia de $x_{n+1} = T(x_n)$. La conclusión combina existencia, unicidad y un algoritmo; si sólo se sabe que T es continua sobre una región compacta, esas tres propiedades no se obtienen juntas.

Brouwer y grado. Toda aplicación continua de una bola cerrada de $\mathbb{R}^n$ en sí misma posee un punto fijo. El grado de Brouwer refina esta idea. Para $F: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $0 \notin F(\partial\Omega)$ se define un entero $\deg(F, \Omega, 0)$. Si es distinto de cero, F tiene al menos un cero en Ω . Cuando los ceros son regulares y finitos,

$$\deg(F, \Omega, 0) = \sum_{x \in F^{-1}(0) \cap \Omega} \text{sgn det } DF(x). \quad (35)$$

El grado se conserva durante una homotopía F_λ mientras ningún cero cruce la frontera. Garantiza existencia, pero no decide estabilidad ni describe la cuenca.

²⁸**Lectura complementaria.** Frank C. Hoppensteadt, *Analysis and Simulation of Chaotic Systems*, secciones sobre estabilidad orbital y mapas de retorno; John Guckenheimer y Philip Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, capítulos 1–3.

Ejemplo de punto fijo por contracción. Para $F(x) = x - x^3$ en $\Omega = (-2, 2)$, los ceros son $-1, 0, 1$ y $F'(x) = 1 - 3x^2$. La suma de signos es

$$\deg(F, (-2, 2), 0) = (-1) + (+1) + (-1) = -1. \quad (36)$$

El grado no nulo obliga a conservar al menos un cero bajo toda deformación admisible. Para saber cuáles de esos equilibrios atraen se necesita el signo de la linealización o un argumento no lineal adicional.

Disparo y residual de retorno. En el problema de frontera

$$u'' = G(t, u, u'), \quad u(0) = a, \quad u(T) = b, \quad (37)$$

se elige la pendiente inicial $s = u'(0)$ y se define

$$S(s) = u(T; s) - b. \quad (38)$$

Un cero de S resuelve el problema. Para una órbita periódica se usa de manera análoga el residual $R(z) = P(z) - z$. Aplicar grado a R requiere que el retorno exista y sea continuo en la región; el cálculo de retornos debe acompañarse de la verificación explícita de esas hipótesis.

Ejercicios con pistas: tres formas de existencia

1. Resuelva por disparo $u'' + u = 0$, $u(0) = 0$, $u(\pi/2) = 1$. **Pista:** con pendiente s , $u(t; s) = s \sin t$.
2. Si $P : [a, b] \rightarrow [a, b]$ es continuo, pruebe que tiene un punto fijo. **Pista:** estudie los signos de $P(x) - x$ en los extremos.
3. Calcule el grado de $x^3 - x$ en intervalos pequeños alrededor de cada raíz y verifique aditividad al reunirlos.

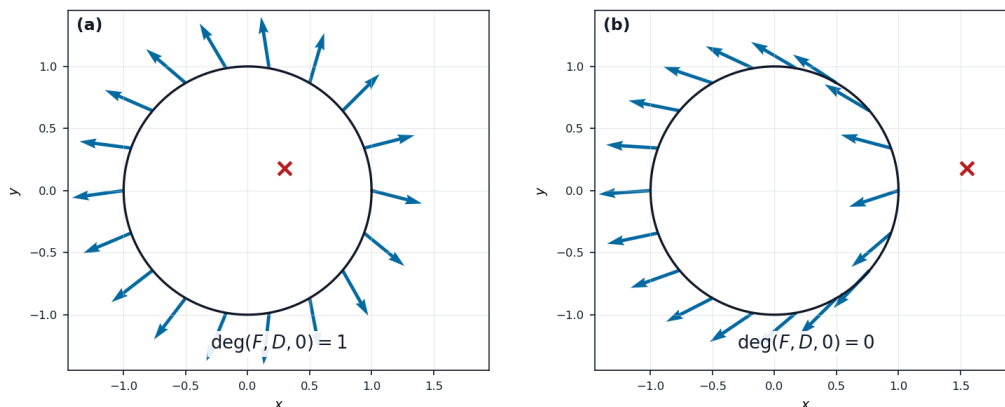


Figura 15: Lectura geométrica del grado en el plano: el campo sobre la frontera rodea una vez al origen cuando el cero está dentro de D y no lo rodea cuando está fuera. El dibujo orienta el cálculo; la conclusión de existencia requiere continuidad y ausencia de ceros sobre la frontera.

Lectura complementaria²⁹

²⁹**Lectura complementaria.** Pablo Gustavo Amster, *Métodos topológicos en el estudio de las ecuaciones diferenciales no lineales*, capítulos sobre disparo, punto fijo y grado; Jessica Angélica Jaurez Rosas et al., *Teoría geométrica de ecuaciones diferenciales II*, secciones sobre existencia y continuación.

8.8 Homoclinicidad, herradura y dinámica simbólica

Una conexión homoclínica aparece cuando una órbita sale de un objeto hiperbólico por su variedad inestable y regresa por su variedad estable. En un mapa, si p es un punto fijo hiperbólico, una intersección

$$q \in W^s(p) \cap W^u(p), \quad T_q W^s + T_q W^u = T_q X, \quad (39)$$

es transversal. La transversalidad impide que la intersección desaparezca ante una perturbación pequeña. El teorema de Smale–Birkhoff establece que una intersección homoclínica transversal de un punto periódico hiperbólico genera, para alguna iteración, una dinámica tipo herradura sobre un conjunto invariante.

Estirar, contraer y plegar. La herradura toma una región, la estira en una dirección, la contrae en otra y la pliega de modo que dos tiras regresan a la región inicial. Cada órbita que permanece en el conjunto puede codificarse según la tira visitada:

$$\dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 s_2 \dots, \quad s_k \in \{0, 1\}. \quad (40)$$

El corrimiento σ elimina el símbolo presente y desplaza la secuencia. En una métrica como

$$d(s, r) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|s_k - r_k|}{2^{|k|+1}}, \quad (41)$$

dos secuencias son próximas si coinciden alrededor del presente. El corrimiento posee órbitas periódicas densas, transitividad y sensibilidad. Esta construcción transforma geometría de intersecciones en una descripción combinatoria.

Definiciones de caos. Para un mapa continuo sobre un conjunto invariante, la definición de Devaney combina transitividad, densidad de puntos periódicos y sensibilidad. La entropía topológica mide crecimiento de órbitas distinguibles. Un exponente de Lyapunov positivo mide expansión promedio a lo largo de una trayectoria. Estas nociones se relacionan en contextos precisos, y cada una conserva su ámbito de aplicación.

Evidencia requerida para interpretar una figura. Un pliegue visible sugiere buscar variedades e intersecciones. Una nube de retornos sugiere estudiar un mapa iterado. Una banda ancha sugiere ausencia de una frecuencia dominante simple. Ninguna de esas señales encierra por sí misma una intersección transversal, una conjugación con el corrimiento o un valor exacto de entropía.

Práctica reproducible: itinerarios del mapa logístico

En *Bifurcación* seleccione *Logístico [listo]*, use $x_0 = 0.2$ y estudie primero $r = 3.2$ y después $r = 4$. Para cada valor conserve 200 iteraciones después de descartar 1000. Exporte la sucesión y codifique $s_n = 0$ si $x_n < 1/2$ y $s_n = 1$ si $x_n \geq 1/2$. Repita desde $x_0 + 10^{-8}$. Compare la longitud del prefijo común, los bloques de símbolos y los puntos del retrato x_{n+1} contra x_n . Esta práctica estudia itinerarios finitos; no presenta la muestra como demostración de una conjugación global.

Ejercicio con pista: periodicidad simbólica

Construya las secuencias binarias de periodo primo 1, 2 y 3 bajo el corrimiento. ¿Cuántas palabras de longitud n existen antes de identificar rotaciones? **Pista:** hay 2^n palabras; para contar órbitas de periodo primo hay que eliminar palabras de periodo divisor y después identificar desplazamientos cíclicos.

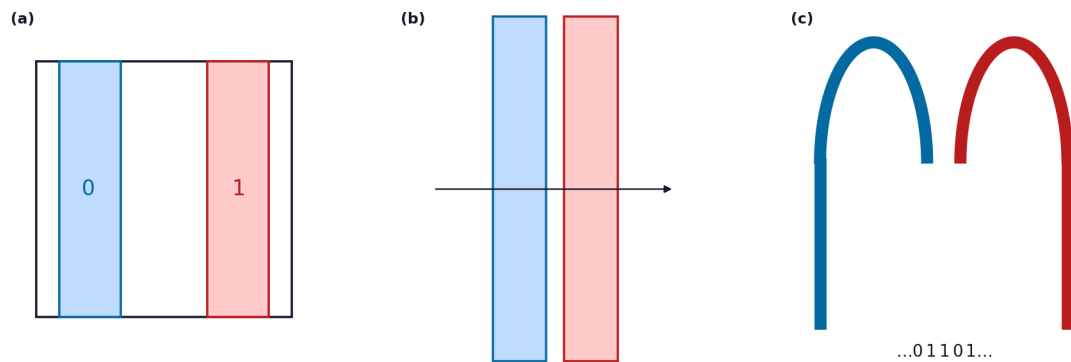


Figura 16: Esquema docente de la herradura: (a) dos franjas codificadas, (b) estiramiento y contracción, y (c) plegamiento con un itinerario binario asociado. La figura explica el mecanismo y la codificación; verificar una herradura en un sistema concreto exige construir el mapa y demostrar las intersecciones necesarias.

Lectura complementaria³⁰

8.9 Estados con memoria y derivadas fraccionarias

En una ODE autónoma, conocer $x(t)$ basta para continuar la solución porque la ley de flujo permite reiniciar desde ese estado. Una ecuación de Caputo conserva información del intervalo recorrido desde el terminal inferior. Para $0 < q < 1$,

Función Gamma e integración fraccionaria. La función Gamma prolonga el factorial y fija la normalización de los operadores:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (42)$$

Para $\alpha > 0$, la integral izquierda de Riemann–Liouville con terminal inferior t_0 es

$$(I_{t_0}^\alpha g)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds. \quad (43)$$

La identidad beta–Gamma permite probar, bajo condiciones de integrabilidad que justifican intercambiar el orden de integración,

$$I_{t_0}^\alpha I_{t_0}^\beta = I_{t_0}^{\alpha+\beta}. \quad (44)$$

La composición ocurre respecto del orden del operador. Su interpretación difiere de la composición temporal para el estado de un problema con memoria. Distinguir ambas afirmaciones evita atribuir a la solución una propiedad que sólo pertenece a las integrales.

Definiciones de derivada fraccionaria. Si $m-1 < q < m$, las derivadas de Riemann–Liouville y de Caputo ordenan de modo distinto la derivación entera y la integración fraccionaria:

³⁰**Lectura complementaria.** Robert L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, capítulos sobre dinámica simbólica; Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, capítulos 15–16; Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, capítulos sobre herraduras y órbitas homoclínicas.

$${}^{\text{RL}}D_{t_0}^q x = \frac{d^m}{dt^m} I_{t_0}^{m-q} x, \quad {}^{\text{C}}D_{t_0}^q x = I_{t_0}^{m-q} x^{(m)}. \quad (45)$$

Para $0 < q < 1$, Caputo anula una constante, mientras

$${}^{\text{RL}}D_{t_0}^q c = \frac{c(t - t_0)^{-q}}{\Gamma(1 - q)}. \quad (46)$$

La forma de Grünwald–Letnikov aproxima el operador mediante diferencias de todos los pasos anteriores:

$${}^{\text{GL}}D_{t_0}^q x(t_n) \approx h^{-q} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{q}{j} x(t_{n-j}), \quad \binom{q}{j} = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(q-j+1)}. \quad (47)$$

Estas expresiones describen operadores distintos. Deben declararse el operador, el terminal inferior, la regularidad y la información inicial. Caputo es conveniente cuando se formulan datos ordinarios $x(t_0)$; Riemann–Liouville puede requerir datos expresados mediante integrales fraccionarias; Grünwald–Letnikov ofrece una ruta discreta que vuelve explícito el costo de conservar la historia.

Ejercicio de lectura activa: una potencia como banco de prueba

Para $x(t) = (t - t_0)^\nu$, con $\nu > 0$, use la identidad beta–Gamma para obtener la integral (43) y después las derivadas de Riemann–Liouville y Caputo cuando existan. Verifique por separado el caso constante. Compare la fórmula con (47) para $q = 0.6$, $h = 0.1, 0.05$ y $t - t_0 = 1$. La entrega debe indicar dominio de los parámetros y error relativo, no sólo valores decimales.

Lectura complementaria³¹

Terminal inferior e inicialización. El valor t_0 marca el comienzo de la memoria incluida en el modelo. Cambiarlo modifica el operador. Si el proceso ya tenía historia antes de t_0 , esa preparación debe incorporarse mediante un término de inicialización o una historia declarada. Reiniciar el cálculo en un tiempo intermedio con el transporte de esa información se define un problema equivalente. La pregunta correcta se formula como únicamente cuál es $x(t_0)$, sino qué preparación representa el dato inicial y desde qué instante se acumula la memoria.

Lectura complementaria³²

Con este marco, la derivada de Caputo de orden $0 < q < 1$ se escribe

$${}^{\text{C}}D_{0+}^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - q)} \int_0^t (t - s)^{-q} \dot{x}(s) ds. \quad (48)$$

El problema

$${}^{\text{C}}D_{0+}^q x(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (49)$$

es equivalente, bajo las hipótesis habituales, a la ecuación de Volterra

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - s)^{q-1} f(x(s)) ds. \quad (50)$$

³¹**Lectura complementaria.** Shantanu Das, *Kindergarten of Fractional Calculus*, capítulos 1–3, para Gamma, generalización, integración y las formas de Grünwald–Letnikov, Riemann–Liouville y Caputo; Edmundo Capelas de Oliveira, *Solved Exercises in Fractional Calculus*, capítulos 2–5, para funciones especiales, Mittag–Leffler, transformadas y comparación de operadores.

³²**Lectura complementaria.** Shantanu Das, *Kindergarten of Fractional Calculus*, capítulo 5, sobre inicialización; Richard Herrmann, *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*, capítulo 8, sobre no localidad y memoria.

La equivalencia se obtiene aplicando la integral fraccionaria de orden q y usando $I^q {}^C D^q x = x - x_0$. La integral de Volterra muestra la memoria de forma directa: cada valor pasado del campo participa en la continuación con un peso que depende de la distancia temporal.

Perfil de memoria. Fije un tiempo t y escriba el futuro como $t + \theta$. Al separar (50) en $[0, t]$ y $[t, t + \theta]$, se obtiene

$$x(t + \theta) = m_t(\theta) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\theta (\theta - u)^{q-1} f(x(t + u)) \, du, \quad (51)$$

$$m_t(\theta) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t + \theta - s)^{q-1} f(x(s)) \, ds. \quad (52)$$

El punto actual es sólo $m_t(0) = x(t)$. Reiniciar con el dato $x(t)$ sustituye la función $m_t(\theta)$ por un término constante y, en general, produce otra continuación. El estado adecuado puede representarse en un espacio de funciones, por ejemplo $\mathfrak{C} = C([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ con convergencia uniforme en intervalos compactos. Sobre ese espacio puede recuperarse una ley de semiflujo para los perfiles, aunque no para las aplicaciones puntuales obtenidas al conservar sólo $x(t)$.

Función de Mittag-Leffler y decaimiento fraccionario. La ecuación escalar

$${}^C D_{0+}^q x = \lambda x, \quad x(0) = x_0 \quad (53)$$

tiene solución

$$x(t) = x_0 E_q(\lambda t^q), \quad E_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(qk + 1)}. \quad (54)$$

Si la evolución puntual formara un semigrupo, tendría que cumplirse

$$E_q(\lambda(t + s)^q) = E_q(\lambda t^q) E_q(\lambda s^q). \quad (55)$$

Al comparar el término lineal en λ , el lado izquierdo contiene $(t + s)^q / \Gamma(q + 1)$ y el derecho $(t^q + s^q) / \Gamma(q + 1)$. Para $0 < q < 1$ y $t, s > 0$ no coinciden. Cuando $q = 1$, $E_1(z) = e^z$ y se recupera la composición ordinaria.

Para $\lambda = -a < 0$, la solución describe relajación. En vez del decaimiento exponencial e^{-at} del caso entero, $E_q(-at^q)$ presenta una cola lenta. Una comparación útil muestra primero la escala lineal, donde domina el transitorio, y después una escala logarítmica, donde la cola se distingue con claridad. El orden q cambia simultáneamente la forma del kernel y la ley de relajación; su interpretación debe interpretarse como un paso temporal.

Ejercicio con pista: continuidad de la memoria

Tome $q = 0.8$, $\lambda = -1$, $x_0 = 1$, $t = 1$ y $s = 1$. Evalúe $E_q[-(t + s)^q]$ y $E_q(-t^q)E_q(-s^q)$ truncando la serie cuando el siguiente término sea menor que 10^{-10} . Repita con $q = 1$. **Pista:** calcule cada serie con precisión suficiente y compare tanto el valor como la diferencia relativa; el caso $q = 1$ sirve como control.

Interpretación gráfica de la memoria. El kernel $K_q(r) = r^{q-1} / \Gamma(q)$ es singular integrable en $r = 0$ y decae lentamente. Una gráfica de K_q para varios órdenes ayuda a comparar el peso de retardos recientes y antiguos, y se complementa con la memoria completa de una trayectoria: la contribución real es el producto del kernel con $f(x(s))$. Una proyección (x_i, x_j) puede cruzarse porque perfiles

distintos comparten las mismas dos coordenadas actuales; ese cruce no contradice unicidad en el espacio funcional.

Lectura complementaria³³

8.10 ABM–PECE de memoria completa

La ecuación de Volterra permite derivar un integrador sin tratar la derivada fraccionaria como una diferencia local. Sea $t_n = nh$ y $F_j = f(t_j, x_j)$. En t_{n+1} ,

$$x(t_{n+1}) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \sum_{j=0}^n \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{n+1} - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds. \quad (56)$$

Predictor. Al aproximar f por la constante F_j en cada subintervalo,

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{n+1} - s)^{q-1} ds = \frac{h^q}{q} [(n+1-j)^q - (n-j)^q]. \quad (57)$$

Como $q\Gamma(q) = \Gamma(q+1)$, el predictor es

$$x_{n+1}^P = x_0 + \frac{h^q}{\Gamma(q+1)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} F_j, \quad b_{j,n+1} = (n+1-j)^q - (n-j)^q. \quad (58)$$

Corrector. Al integrar una interpolación lineal del campo y evaluar el extremo nuevo con el predictor,

$$x_{n+1} = x_0 + \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} \left[f(t_{n+1}, x_{n+1}^P) + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} F_j \right], \quad (59)$$

donde

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{q+1} - (n-q)(n+1)^q, & j=0, \\ (n-j+2)^{q+1} + (n-j)^{q+1} - 2(n-j+1)^{q+1}, & 1 \leq j \leq n. \end{cases} \quad (60)$$

PECE resume cuatro acciones: predecir, evaluar, corregir y evaluar otra vez. Las sumas comienzan en $j=0$ en todos los pasos; quitar términos antiguos cambia el modelo numérico y exige una aproximación de memoria corta con error declarado.

Para $q=1$, los pesos del predictor valen uno y el corrector recupera la regla trapezoidal compuesta. Este límite es una prueba básica de implementación. También deben compararse h , $h/2$ y $h/4$, mantener fijo el terminal inferior y registrar

$$\mathcal{N} = (q, h, T, x_0, \text{método}, \text{política de memoria}). \quad (61)$$

³³**Lectura complementaria.** Kai Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, capítulos sobre problemas de valor inicial de Caputo y ecuaciones de Volterra; Igor Podlubny, *Fractional Differential Equations*, capítulos 1–4; Richard Herrmann, *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*, capítulos 2–3, 5–6 y 8, para funciones, derivadas, cálculo, oscilación y memoria; Shantanu Das, *Kindergarten of Fractional Calculus*, capítulos 6–7, para relajación de Mittag–Leffler y ecuaciones diferenciales fraccionarias.

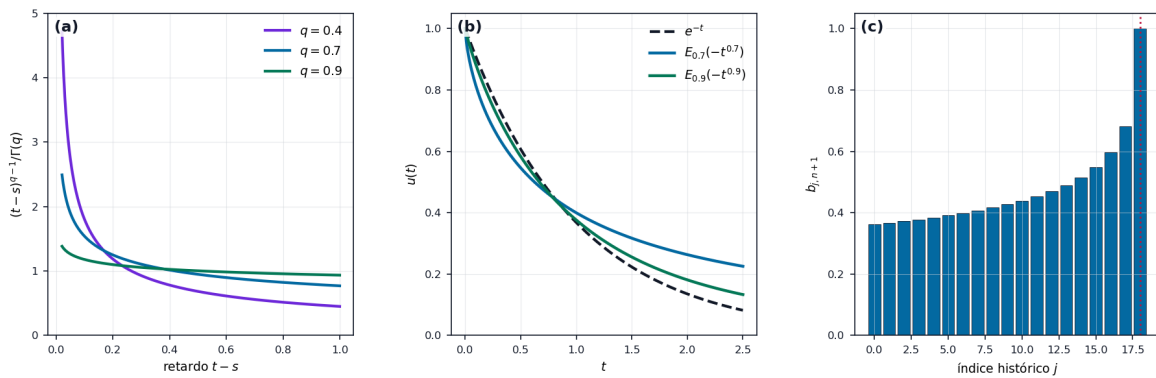


Figura 17: Tres superficies de lectura para un problema de Caputo: (a) kernel de memoria para varios órdenes, (b) relajación de Mittag–Leffler comparada con el caso exponencial y (c) pesos históricos del predictor ABM. La altura de un peso representa una contribución que debe multiplicarse por la evaluación histórica correspondiente y sumarse desde el terminal inferior fijo.

Laboratorio numérico: relajación escalar

Implemente (58)–(60) para ${}^C D^q x = -x$, $x(0) = 1$, $q = 0.8$, $T = 5$ y $h = 0.05, 0.025, 0.0125$. Compare con $E_q(-t^q)$ y reporte el error máximo en una malla común. Como control dentro de Toolbox Chaos, defina $\dot{x} = -x$ en *Crear sistema* y compare Euler, Heun y RK4 mediante *Comparar metodos*: esta ejecución corresponde al límite entero; el cálculo con memoria conserva el historial completo. Conserve tabla, configuración y una gráfica de error; no entregue únicamente curvas superpuestas.

Límite de interpretación

Un método que reinicia periódicamente desde el último valor de x no implementa la misma ecuación de Caputo con terminal inferior fijo. Una coincidencia visual durante un intervalo corto no corrige esa diferencia. Antes de comparar dos soluciones deben coincidir operador, orden, terminal inferior, historia, política de memoria, paso y horizonte.

Lectura complementaria³⁴

8.11 Comprobación de hipótesis y resultados

Los conceptos anteriores forman una cadena, no una colección de palabras. El espacio de fases fija qué estados y vecindades son legítimos. La existencia y unicidad permiten hablar de flujo. La invariancia y las regiones atrapantes organizan el comportamiento global. La variación describe perturbaciones; Poincaré convierte un ciclo en un punto fijo; Floquet mide su estabilidad transversal. El grado responde preguntas de existencia sin resolver necesariamente el objeto. Las intersecciones de variedades conectan geometría con dinámica simbólica. En Caputo, toda la cadena debe levantarse a un estado que conserve memoria.

Objeto	Pregunta matemática	Comprobación antes de interpretar una gráfica
Espacio de fases	¿Qué representa un estado y qué puntos se identifican?	Unidades, periodicidad angular, dimensión y distancia elegida.

³⁴**Lectura complementaria.** Kai Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, sección del método predictor–corrector; K. Diethelm, N. J. Ford y A. D. Freed, “A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations”, *Nonlinear Dynamics*, 2002; Igor Podlubny, *Fractional Differential Equations*, secciones numéricas.

Objeto	Pregunta matemática	Comprobación antes de interpretar una gráfica
Flujo	¿Existe una evolución única y componible?	Regularidad del campo, intervalo de existencia y dependencia de la condición inicial.
Invariancia	¿Las trayectorias permanecen en el conjunto?	Signo del campo en la frontera o argumento exacto de conservación.
Atracción	¿La distancia al conjunto tiende a cero?	Varias condiciones iniciales, transitorio, horizonte y definición de distancia.
Variedad estable	¿Qué estados convergen al objeto hiperbólico?	Espectro local, tangencia y continuidad al ampliar la integración.
Retorno	¿El siguiente cruce define una función?	Sección, orientación, exclusión de tangencias e interpolación del evento.
Floquet	¿Cómo cambia una perturbación después de un periodo?	Periodo, integración variacional, multiplicador trivial y convergencia numérica.
Grado	¿Debe existir un cero o punto fijo dentro de la región?	Ausencia de ceros en la frontera y continuidad durante la homotopía.
Dinámica simbólica	¿Existe una codificación compatible con la iteración?	Región invariante, partición, cobertura y correspondencia de itinerarios.
Memoria Caputo	¿Qué historia determina la continuación?	Orden, terminal inferior, perfil, política de memoria y comparación de pasos.

Proyecto breve: una afirmación, tres niveles de evidencia

Elija uno de estos objetos: región atrapante de (15), variedad de (26), retorno del ciclo radial o itinerarios del mapa logístico. Entregue una página con: definición; derivación analítica; experimento en Toolbox Chaos; dos refinamientos; interpretación de cada gráfica; y una frase precisa sobre el alcance que ya se estableció. Otra persona debe poder repetir el cálculo con la información escrita, sin instrucciones orales.

Problemas de cierre.

1. Demuestre que la imagen de un conjunto conexo bajo una aplicación continua es conexa. Explique cómo usaría el resultado para revisar una transformación de coordenadas.
2. Para $\dot{x} = x(1 - x)$, determine flujo implícito, equilibrios, cuencas y conjuntos ω -límite. Dibuje primero la línea de fase.
3. Construya una función h cuya subnivel describa un disco y aplique (8) al sistema radial.
4. Verifique (24) para un sistema lineal diagonal y compare con el producto de sus soluciones escalares.
5. En (26), busque el siguiente término de una gráfica invariante $h(x) = a_2x^2 + a_3x^3$ y explique por qué $a_3 = 0$.
6. Derive (32) a partir de (24) y del multiplicador tangencial igual a uno.
7. Para $P(x) = rx(1 - x)$, determine la estabilidad de los puntos fijos y describa qué cambia cuando un multiplicador cruza -1 .

8. Justifique por qué un grado no nulo de $P - I$ demuestra existencia de un punto fijo, pero no su estabilidad.
9. Compare recurrencia en el estado puntual con recurrencia del perfil $m_t(\theta)$ de (52).
10. Pruebe que los pesos $b_{j,n+1}$ de (58) son positivos y explique su comportamiento para datos muy antiguos.

Criterios de resolución para los problemas 1–10. En el problema 1 use la caracterización de conexidad por separaciones. En el 2 separe variables y conserve los signos antes de integrar. En el 3 tome $h = x^2 + y^2 - R^2$. En el 4 use $M(t) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$. En el 5 sustituya la serie en (27). En el 6 separe la dirección tangente de la transversal. En el 7 derive $P'(x^*)$. En el 8 recuerde que el grado no contiene tasas temporales. En el 9 construya dos perfiles con el mismo valor en cero. En el 10 use que u^q es creciente para $q > 0$.

Criterio de avance

El capítulo está dominado cuando puede explicarse a partir de definiciones y teoremas por qué una frontera de píxeles requiere una definición de frontera matemática; la linealización es local; cómo un ciclo se convierte en punto fijo de retorno; qué aporta un grado no nulo; qué hipótesis geométrica precede a una herradura; y por qué en Caputo el valor actual requiere la historia necesaria para continuar.

9 Mapas, flujos, señales y sistemas avanzados

Objetivo de aprendizaje

Integrar teoría y cómputo para estudiar mapas discretos, flujos caóticos canónicos, rutas al caos, geometría fractal, datos temporales, retardo, alta dimensión, dinámica conservativa y transitoria, sincronización, control y memoria fraccionaria. La meta es formular conclusiones graduadas: qué se derivó, qué se observó, qué indicador se estimó y qué permanece abierto.

9.1 Mapa logístico y diagrama de telaraña

Ecuación del mapa logístico. Un *mapa dinámico* actualiza el estado en instantes discretos:

$$x_{n+1} = f(x_n; \mu).$$

La órbita de x_0 es la sucesión $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\}$. Un punto fijo satisface $f(x^*) = x^*$; un punto de periodo primo p satisface $f^p(x) = x$ y no vuelve antes. Para un punto fijo hiperbólico,

$$|f'(x^*)| < 1 \implies \text{atractor local}, \quad |f'(x^*)| > 1 \implies \text{repulsor local}.$$

La derivada es un *multiplicador por iteración*; las tasas por unidad de tiempo corresponden a los flujos continuos.

Construcción de telaraña. En el plano (x_n, x_{n+1}) , se dibujan $y = f(x)$ y la diagonal $y = x$. Desde x_n , un segmento vertical llega a $f(x_n)$ y uno horizontal regresa a la diagonal, donde queda x_{n+1} . La alternancia reproduce exactamente la iteración; representa la actualización discreta del mapa. Una convergencia alternante indica multiplicador negativo, mientras que una convergencia sin alternancia suele asociarse con uno positivo.

Ejemplo algebraico resuelto: mapa logístico. Para

$$f_r(x) = rx(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

los puntos fijos satisfacen

$$x = rx(1 - x) \implies x_0^* = 0, \quad x_1^* = 1 - \frac{1}{r} \quad (r \neq 0).$$

Como $f'_r(x) = r(1 - 2x)$,

$$f'_r(0) = r, \quad f'_r(x_1^*) = 2 - r.$$

El origen es estable para $|r| < 1$; el punto no nulo es estable cuando $|2 - r| < 1$, es decir, $1 < r < 3$. En $r = 3$ su multiplicador cruza -1 , firma local de la primera duplicación de periodo.

Para $r = 4$ y $x_0 = 0.2$,

$$x_1 = 0.64, \quad x_2 = 0.9216, \quad x_3 = 4(0.9216)(0.0784) = 0.28901376.$$

Los tres valores son reproducibles a mano; la interpretación requiere el cálculo de indicadores además de la apariencia de la gráfica. El exponente finito de una órbita se estima mediante

$$\lambda_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \log |r(1 - 2x_n)|.$$

Práctica reproducible: cuatro regímenes logísticos

Seleccione el sistema logístico registrado o defínalo como mapa en *Crear sistema*. Use $x_0 = 0.2$, descarte 500 iteraciones y conserve 500. Ejecute $r = 2.8, 3.2, 3.5$ y 4 . Para los dos primeros dibuje a mano las primeras veinte etapas de la telaraña; para todos exporte la serie y calcule λ_N . En *Bifurcación*, barra $r \in [2.5, 4]$ con una malla que después duplique. Conserve el mismo transitorio y número de muestras al comparar.

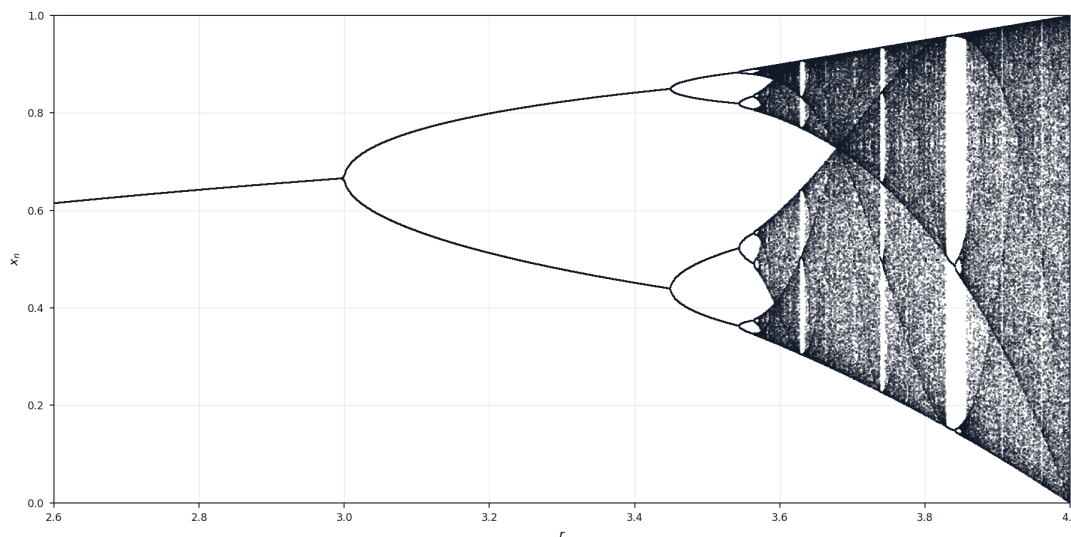


Figura 18: Diagrama logístico producido para el manual con el software. Cada columna contiene iterados tardíos para un parámetro; las líneas aparentes son conjuntos de puntos muestreados, no curvas de soluciones continuas.

Lectura de la órbita logística. Una rama única corresponde a un valor tardío dominante; dos ramas, a una órbita de periodo dos, si se confirma el orden temporal. Una banda densa puede contener órbitas caóticas, inestables, preperiódicas y efectos de resolución. Las ventanas claras dentro de bandas densas motivan una simulación local con mayor transitorio.

Límite de interpretación

El diagrama de bifurcación debe leerse junto con x_0 , transitorio, aritmética, malla y dirección del barrido. La identificación de un atractor único exige telaraña con muchas líneas tampoco demuestra sensibilidad; para ello se comparan órbitas vecinas o se estima expansión con control de convergencia.

Lectura complementaria³⁵

9.2 Mapa de Hénon, plegamiento y dinámica simbólica

Ecuaciones y puntos fijos de Hénon. Un mapa bidimensional puede contraer área en una dirección y estirar y plegar en otra. El mapa de Hénon, en una convención habitual, es

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \quad y_{n+1} = bx_n.$$

Su Jacobiano es

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad \det DF = -b.$$

Por tanto, un elemento de área cambia su magnitud por el factor constante $|b|$. Con $|b| < 1$ existe contracción de área. La clasificación de cada órbita requiere acotada.

La *dinámica simbólica* asigna a cada estado un símbolo según una partición. Un itinerario $s_0 s_1 s_2 \dots$ registra qué región visita la órbita. Para que esta codificación sea una representación matemática completa se necesita justificar una partición generadora y una relación con un desplazamiento simbólico; etiquetar puntos por su signo sólo produce un resumen.

Ejemplo algebraico resuelto: puntos fijos de Hénon. En un punto fijo $y^* = bx^*$ y

$$x^* = 1 - a(x^*)^2 + bx^*,$$

de modo que

$$a(x^*)^2 + (1 - b)x^* - 1 = 0.$$

Para $a = 1.4$, $b = 0.3$,

$$x_{\pm}^* = \frac{-0.7 \pm \sqrt{6.09}}{2.8} \simeq 0.63135, -1.13135, \quad y_{\pm}^* = 0.3x_{\pm}^*.$$

En cada punto, $\tau = -2ax^*$ y $\Delta = -0.3 < 0$. Por el criterio plano, ambos son sillas. El atractor numérico clásico, cuando se observa, pertenece a la dinámica alejada de esos puntos; su organización está vinculada con las variedades de las sillas y el plegamiento global.

Itinerario simbólico del mapa de Hénon. Defina $s_n = L$ si $x_n < 0$ y $s_n = R$ si $x_n \geq 0$. La palabra $RRLLR$, sin espacios, identifica cinco visitas, pero no conserva amplitudes ni distancias. Las frecuencias de bloques LR , RL , LL , RR pueden comparar órbitas largas; la condición de bloque prohibido requiere muestras y criterios adicionales.

³⁵**Lectura complementaria.** Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2.ª ed., secciones 10.1, “Fixed Points and Cobwebs”, 10.2–10.5, sobre mapa logístico, ventanas y exponente de Lyapunov; Robert L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*, 2.ª ed., capítulos 4–8, sobre análisis gráfico, puntos fijos, bifurcaciones y diagrama de órbitas; Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, secciones 1.1–1.7.

Práctica reproducible: Hénon y un alfabeto binario

Genere Hénon con $a = 1.4$, $b = 0.3$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 20000 iteraciones y descarte 2000. Use *Serie temporales* y *Retratos 2D*; exporte los datos. Verifique los dos puntos fijos calculados y clasifíquelos con sus matrices. Codifique las últimas 10000 observaciones mediante L/R , cuente bloques de longitud dos y tres y repita con $(10^{-8}, 0)$. Registre si cambian las frecuencias dentro de la precisión muestral.

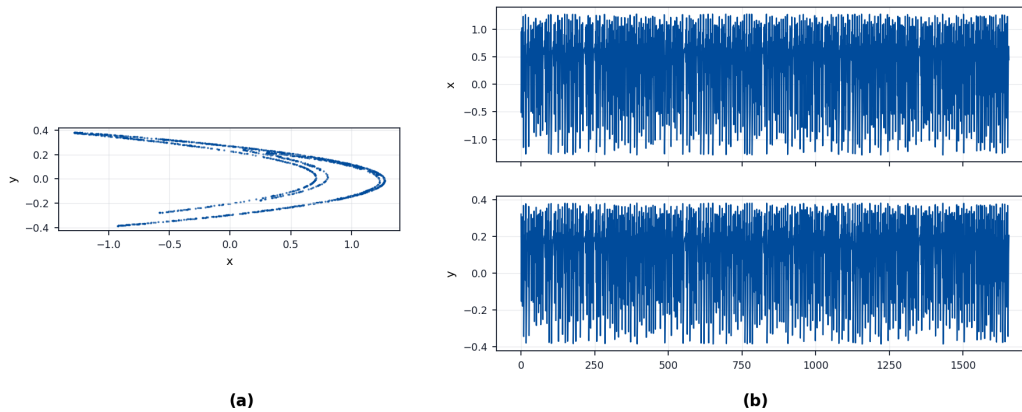


Figura 19: Retrato y serie del mapa de Hénon generados por Toolbox Chaos. El retrato revela plegamiento geométrico; la serie conserva el orden de visitas que se pierde en la nube plana.

Lectura del retrato de fase de Hénon. El espesor aparente del conjunto depende de resolución, antialiasing y número de puntos. Una ampliación debe recalcular o redibujar los datos, no ampliar una captura. La serie permite detectar escape o periodicidad; el retrato revela foliaciones y plegamiento; el itinerario simbólico resume recurrencia entre regiones.

Límite de interpretación

$|\det DF| < 1$ demuestra contracción local de área. La existencia y unicidad de un atractor, la sensibilidad y la conjugación con el desplazamiento de Bernoulli requieren verificar hipótesis adicionales sobre la partición y los itinerarios.

Lectura complementaria³⁶

9.3 Lorenz, Rössler, Chua y Duffing–Ueda

Mecanismos dinámicos en cuatro modelos. Estos sistemas son laboratorios matemáticos, no plantillas intercambiables. Lorenz combina convección idealizada, simetría y disipación:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = x(\rho - z) - y, \quad \dot{z} = xy - \beta z.$$

Rössler concentra la no linealidad en una ecuación:

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = b + z(x - c).$$

³⁶**Lectura complementaria.** Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2.^a ed., sección 12.2, “The Hénon Map”; Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, secciones 2.2, 2.5–2.6, 3.5 y 5.6; Robert L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*, 2.^a ed., capítulo 9, sobre dinámica simbólica, desplazamiento y conjugación; Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 3.^a ed., capítulo 15, apartados sobre caos, dinámica simbólica, desplazamiento y conjunto de Cantor.

Una forma de Chua usa una no linealidad por tramos:

$$\dot{x} = \alpha[y - x - h(x)], \quad \dot{y} = x - y + z, \quad \dot{z} = -\beta y,$$

$$h(x) = m_1 x + \frac{m_0 - m_1}{2}(|x + 1| - |x - 1|).$$

Duffing–Ueda es no autónomo; con la fase del forzamiento se escribe

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -2\zeta v - x - sx^3 + f \cos \phi, \quad \dot{\phi} = \nu.$$

Ejemplo algebraico resuelto: Lorenz clásico. La divergencia del campo es constante:

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = -\sigma - 1 - \beta.$$

Para $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 28, 8/3)$ vale $-41/3 < 0$; un volumen infinitesimal se contrae como $\exp[-(41/3)t]$. Esto demuestra disipación volumétrica local, no acotación global por sí sola.

Los equilibrios son

$$E_0 = (0, 0, 0), \quad E_{\pm} = (\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$$

cuando $\rho > 1$. En el caso clásico,

$$E_{\pm} = (\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27).$$

La transformación $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$ deja invariantes las ecuaciones y explica la simetría de los dos lóbulos. No obliga a una trayectoria finita a pasar exactamente el mismo tiempo en cada uno.

Estructura algebraica de los cuatro modelos. En Rössler,

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = a + x - c,$$

que varía a lo largo de la órbita; en el Duffing autónomo, $\nabla \cdot \mathbf{f} = -2\zeta$. En Chua, la pendiente efectiva de $h(x)$ cambia al cruzar los quiebres. Por tanto, “disipativo” puede significar contracción instantánea constante, contracción media o contracción por regiones; el cálculo debe acompañar la etiqueta.

Práctica reproducible: atlas de cuatro flujos

En cada pestaña seleccione el preset registrado de Lorenz, Rössler, Chua y Duffing–Ueda. Antes de ejecutar copie las ecuaciones, parámetros y estado inicial que muestra la interfaz. Use RK4 y el paso recomendado por cada preset; genere *Atractor 3D*, pulse *Usar última trayectoria* en *Retratos 2D* y *Series temporales*, y repita con la mitad del paso y el mismo horizonte físico. Para Lorenz marque $E_0, E_{\pm}$. Para Duffing interprete la fase como reloj del forzamiento y construya, desde los datos, una sección cada $2\pi/\nu$.

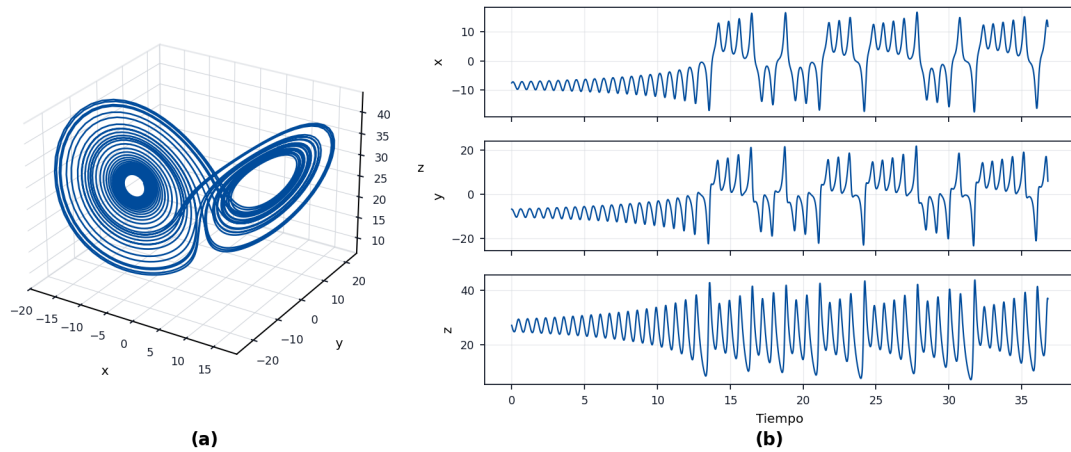


Figura 20: Lorenz en una vista combinada de trayectoria y series generada por Toolbox Chaos. Los lóbulos reflejan la simetría del campo; los cambios de lóbulo se localizan mejor al conservar el orden temporal.

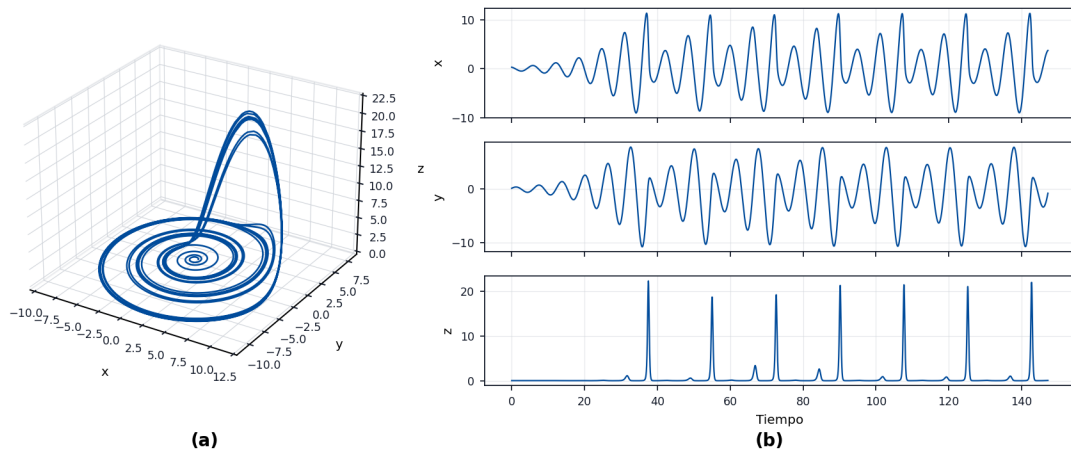


Figura 21: Rössler generado por Toolbox Chaos. La rotación casi plana y las excursiones en la tercera coordenada sugieren un mecanismo de estiramiento y reinyección; la proyección requiere el procedimiento adicional que establece una sección de retorno unimodal.

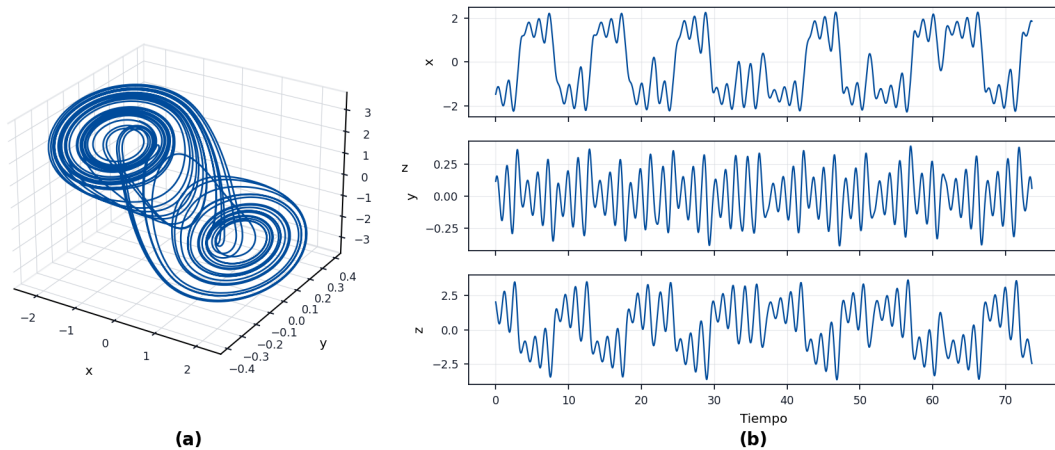


Figura 22: Chua generado por Toolbox Chaos. Los cambios entre regiones de la característica por tramos organizan la geometría de doble desplazamiento; los quiebres de la ecuación deben interpretarse junto con la escala de los ejes.

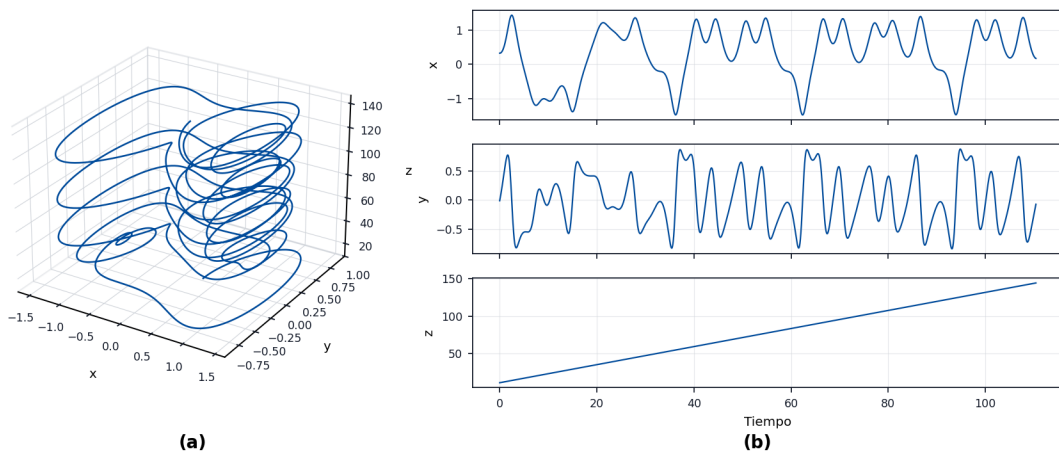


Figura 23: Duffing–Ueda generado por Toolbox Chaos. El retrato proyectado mezcla movimiento y fase de forzamiento; una sección estroboscópica separa mejor periodicidad, cuasiperiodicidad y respuesta irregular.

Variables para analizar cada modelo. En cada figura identifique: variable horizontal y vertical; tramo transitorio; rango tardío; simetrías; vecindad de equilibrios; orientación; frecuencia de retornos; y posibles saturaciones. Después formule una frase causal vinculada con un término de la ecuación y una frase prudente que describa sólo lo observado. Esta doble redacción evita que un parecido visual sustituya el análisis.

Límite de interpretación

Las cuatro imágenes fueron generadas con configuraciones concretas del software. No son retratos de todo el espacio de parámetros. La identificación de Lorenz, Rössler y caos en Chua requiere contrastar los retratos con ecuaciones y diagnósticos; una respuesta irregular de Duffing requiere controlar transitorios y aliasing.

Lectura complementaria³⁷

³⁷**Lectura complementaria.** Julien C. Sprott, *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*, capítulo 2, apartados sobre van der Pol, Rayleigh y Duffing forzados, y capítulo 3, apartados sobre Lorenz, Rössler, sistemas de

9.4 Rutas al caos: duplicación, cuasiperiodicidad, intermitencia y crisis

Mecanismos de transición al caos. Una *ruta al caos* es una secuencia organizada de cambios al variar un parámetro. Entre las rutas frecuentes se encuentran:

- duplicaciones sucesivas del periodo;
- ruptura de un toro después de movimiento cuasiperiódico;
- intermitencia, con fases casi regulares interrumpidas por ráfagas;
- crisis, donde una colisión global cambia bruscamente tamaño, acceso o vida de un conjunto caótico;
- bifurcaciones homoclínicas o heteroclínicas asociadas con variedades invariantes.

Estas etiquetas requieren evidencias diferentes. Un diagrama de máximos es eficaz para duplicación y crisis; un número de rotación y espectro son más informativos para cuasiperiodicidad; una distribución de longitudes laminares ayuda en intermitencia.

Ejemplo algebraico resuelto: primera cascada logística. La rama fija no nula del mapa logístico tiene multiplicador $2 - r$, que alcanza -1 en $r = 3$. Los puntos de periodo dos que no son fijos son

$$x_{\pm} = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r - 3)(r + 1)}}{2r}.$$

Para $r = 3.2$,

$$x_{-} \simeq 0.5130, \quad x_{+} \simeq 0.7995.$$

El multiplicador del ciclo es el producto

$$M_2 = f'(x_{-})f'(x_{+}) = -r^2 + 2r + 4.$$

En $r = 3.2$, $M_2 = 0.16$, por lo que el ciclo es estable. Pierde estabilidad cuando $M_2 = -1$, es decir, en $r = 1 + \sqrt{6} \simeq 3.44949$. Este cálculo localiza dos niveles de la cascada sin depender de la resolución del diagrama.

Escalamiento de Feigenbaum. Si r_n son parámetros de duplicaciones sucesivas en una familia unimodal genérica, las razones

$$\delta_n = \frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{r_n - r_{n-1}}$$

pueden aproximarse a una constante universal. La universalidad requiere hipótesis sobre la familia y un límite; una razón calculada con tres puntos aproximados no la demuestra.

Práctica reproducible: distinguir cuatro rutas

Primero use *Bifurcación* para la logística y refine los intervalos alrededor de $r = 3$ y $r = 1 + \sqrt{6}$. Después, con Duffing–Ueda, construya secciones estroboscópicas para una secuencia de amplitudes de forzamiento tomada del preset y registre si aparece un número finito de puntos, una curva o una nube. Para Lorenz, barra ρ en ambas direcciones y use el mismo estado inicial y transitorio. Cuando observe un salto, simule a ambos lados con horizontes duplicados y varias condiciones iniciales.

Sprott, ecuaciones jerk y Chua; Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, capítulo 9, apartados sobre Lorenz, Rössler, Chua, flujos forzados y exponentes de Lyapunov; Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 3.^a ed., capítulos 14 y 16, apartados sobre Lorenz, Rössler, doble desplazamiento y circuito de Chua.

Lectura de las rutas al caos. Una duplicación conserva orden: los máximos alternan entre dos, cuatro y más niveles. Un toro se manifiesta como curva cerrada en una sección apropiada, no como una banda en cualquier proyección. La intermitencia se reconoce en la serie por intervalos laminares. Una crisis se investiga mediante cambio abrupto de tamaño o tiempo de vida y proximidad a una estructura invariante.

Límite de interpretación

Identifique una duplicación de periodo mediante la comprobación de la alternancia temporal. Una banda espectral ensanchada no identifica por sí sola ruptura de toro. Un salto en un barrido unidireccional puede ser retraso transitorio o coexistencia, y un cambio abrupto requiere análisis adicional para clasificar una crisis global.

Lectura complementaria³⁸

9.5 Fractales, cuencas y dimensiones

Dimensiones fractales y cuencas. Un conjunto muestra *escalamiento fractal* cuando el número de elementos necesarios para cubrirlo sigue una ley de potencia en un intervalo de escalas. La dimensión de cajas se define, si existe el límite, por

$$D_B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

Para puntos de una trayectoria, la integral de correlación

$$C(\varepsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbf{1}\{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| < \varepsilon\}$$

puede escalar como $C(\varepsilon) \propto \varepsilon^{D_2}$. La estimación de D_2 requiere excluir pares temporalmente próximos, revisar saturación con la dimensión de inmersión y encontrar una zona de escala.

Ejemplo algebraico resuelto: conjunto de Cantor. En la etapa k del conjunto ternario de Cantor hay $N_k = 2^k$ intervalos de longitud $\varepsilon_k = 3^{-k}$. Por tanto,

$$D_B = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^k} = \frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0.63093.$$

La dimensión no proviene de que el dibujo sea rugoso, sino de una relación exacta de autosemejanza.

Ejemplo espectral: Kaplan–Yorke. Ordenados $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$, sea j el mayor índice con $\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0$. La dimensión de Kaplan–Yorke se define como

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}.$$

Para un espectro ilustrativo $(0.90, 0, -14.6)$,

$$D_{KY} = 2 + \frac{0.90}{14.6} \simeq 2.0616.$$

Ésta es una dimensión derivada de exponentes estimados, no la misma definición que D_B o D_2 .

³⁸**Lectura complementaria.** Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2.^a ed., secciones 8.4, 8.6–8.7 y 10.4–10.7; Robert C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2.^a ed., capítulos 2, 4, 6 y 7, apartados sobre universalidad, transitorios, cuasiperiodicidad, intermitencia y crisis; Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, capítulos 10–12; John Guckenheimer y Philip Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, capítulos 4–6.

Práctica reproducible: cuenca y escalamiento

En *Cuenca de atracción*, seleccione un caso con clasificador disponible. Fije el dominio de (x_0, y_0) , z_0 , integrador, dt , horizonte y umbrales. Calcule mallas 100×100 , 200×200 y 400×400 ; exporte la clasificación. Para una frontera binaria, cuente cajas ocupadas a tamaños $\varepsilon = 1/4, 1/8, 1/16, 1/32$ del lado del dominio y ajuste la pendiente $\log N$ contra $\log(1/\varepsilon)$. Repita con tiempo doble.

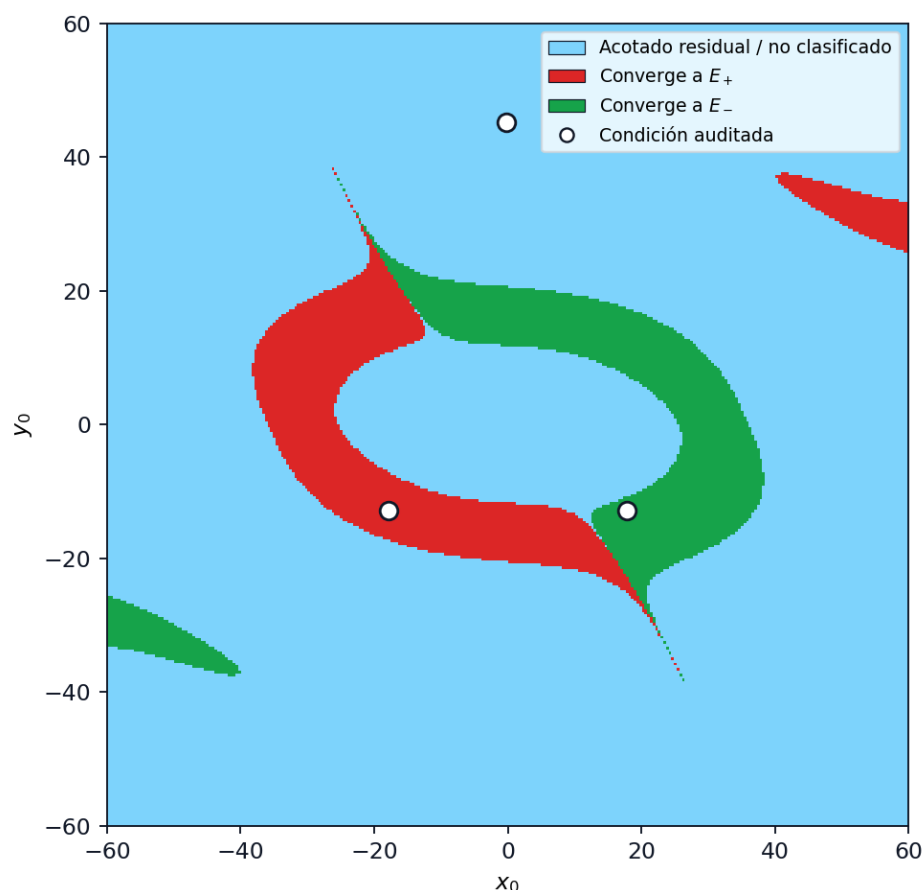


Figura 24: Zonas de lectura de una cuenca de Lorenz generada con Toolbox Chaos. Los colores representan clases calculadas bajo un horizonte y un clasificador; las celdas próximas a una frontera requieren refinamiento antes de asignarles etiquetas asíntóticas exactas.

Lectura de fronteras y dimensiones. Una pendiente sólo es defendible donde la gráfica log-log es aproximadamente lineal y estable al añadir escalas. En una cuenca, las regiones interiores suelen ser más robustas que la frontera. Conviene representar una clase separada para escapes, indeterminación o no convergencia, en vez de forzar cada celda a un atractor.

Límite de interpretación

Una dimensión estimada con dos escalas es sólo una pendiente. El antialiasing de una imagen no contiene datos de cajas; deben usarse coordenadas o etiquetas exportadas. La identificación de Wada requiere pruebas topológicas, y un valor de Kaplan-Yorke se complementa con una estimación geométrica y evidencia de la medida invariante específica.

Lectura complementaria³⁹

³⁹**Lectura complementaria.** Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, secciones 4.1, 4.4–4.7 y 5.3; Robert L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*, 2.^a ed., capítulo 14, apartados sobre fractales y dimensión; Robert C. Hilborn, *Chaos and*

9.6 Series temporales, FFT y densidad espectral

Series temporales, FFT y PSD. Una serie uniformemente muestreada es $s_n = s(n\Delta t)$, con frecuencia $f_s = 1/\Delta t$. La transformada discreta

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-2\pi i k n / N}$$

evalúa frecuencias $f_k = k f_s / N$. Para una señal real, la parte unilateral contiene frecuencias hasta Nyquist,

$$f_N = \frac{f_s}{2}.$$

El *espectro de amplitud* describe magnitudes de componentes en un registro; la *densidad espectral de potencia* distribuye potencia por frecuencia. Welch promedia periodogramas de segmentos solapados y reduce varianza a cambio de resolución.

Ventanas, fuga y aliasing. Un registro finito equivale a multiplicar la señal por una ventana temporal. Si una senoide no completa un número entero de periodos, su energía se reparte entre frecuencias: *fuga espectral*. Una ventana suaviza discontinuidades en los extremos, pero ensancha picos. Si existe contenido por encima de f_N , el muestreo lo refleja a frecuencias falsas: *aliasing*. Ninguna opción gráfica repara datos ya submuestreados.

Ejemplo de frecuencias discretas. Con $\Delta t = 0.01$ y $N = 10000$,

$$f_s = 100, \quad f_N = 50, \quad \Delta f = \frac{f_s}{N} = 0.01.$$

Una señal $s(t) = 2 \cos(2\pi 1.5 t)$ cae exactamente en el bin $k = 1.5/0.01 = 150$ si el registro mantiene esa longitud. Si se reduce a $N = 2000$, $\Delta f = 0.05$; el pico sigue localizable pero con malla cinco veces más gruesa. Una señal de 60 Hz muestreada a 100 Hz aparece aliased cerca de $|60 - 100| = 40$ Hz.

Práctica reproducible: una trayectoria, dos espectros

Genere Lorenz clásico con RK4, $dt = 0.01$, $T = 200$, y descarte $T_0 = 20$. Pulse *Usar última trayectoria* en *Espectro*. Calcule primero *PSD de Welch (recomendado)* y después *Espectro de amplitud*, sin cambiar datos ni variable. Repita con $T_0 = 50$ y con una trayectoria generada a $dt = 0.005$. Exporte las series y compruebe f_s , Nyquist, longitud útil y resolución. Compare x , y y z junto con el pico más alto.

Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers, 2.^a ed., capítulos 9–10, apartados sobre dimensión fractal, correlación y multifractales; Tamás Tél y Márton Gruiz, *Chaotic Dynamics: An Introduction Based on Classical Mechanics*, capítulos 2 y 6.

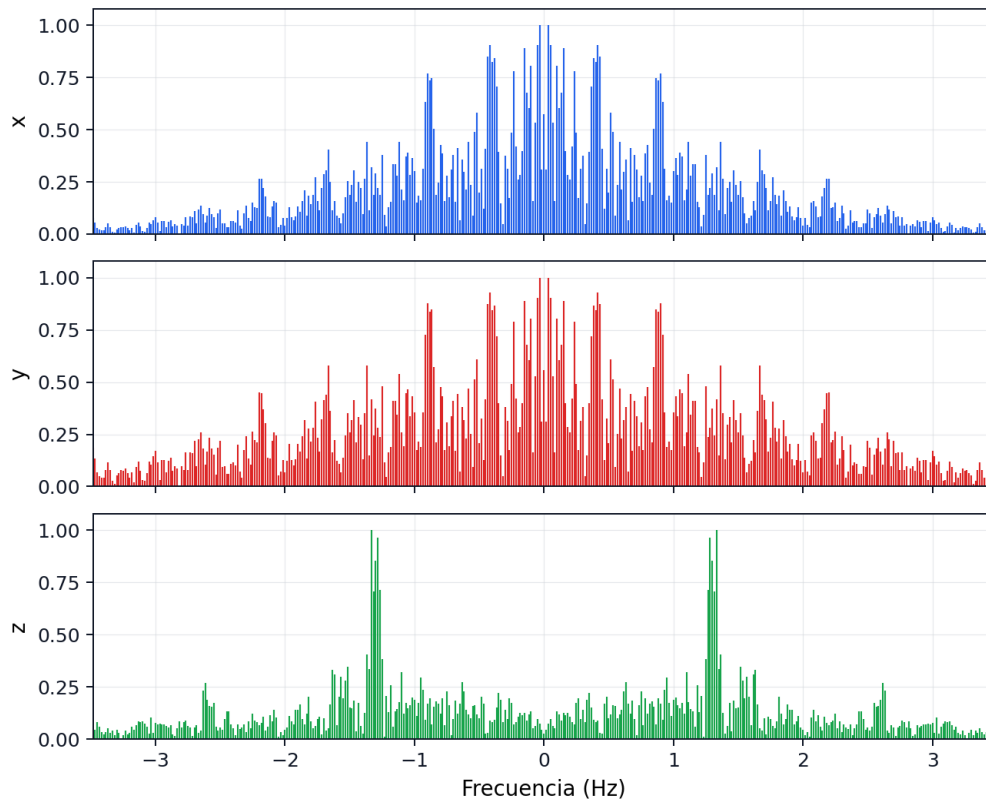


Figura 25: Espectro normalizado centrado de Lorenz generado a partir de datos del software. Los picos y la banda describen el registro finito y su muestreo; su interpretación requiere solos una prueba de caos.

Lectura de espectros y series. Una órbita periódica ideal produce líneas en la frecuencia fundamental y armónicos; una cuasiperiódica, combinaciones de varias frecuencias inconmensurables; una señal irregular puede mostrar banda ancha. Transitorios, ruido, modulación y no estacionariedad también ensanchan el espectro. La serie original debe revisarse antes de interpretar cada pico.

Límite de interpretación

Un espectro ancho orienta el análisis de caos y un pico agudo orienta el de periodicidad asintótica; ambos requieren pruebas dinámicas complementarias. Comparar amplitudes entre registros con distinta normalización, ventana o duración es inválido. Welch mejora estabilidad estadística, pero no aumenta la frecuencia de Nyquist ni recupera información perdida por aliasing.

Lectura complementaria⁴⁰

9.7 Reconstrucción por retardo y diagnóstico desde una observación

Vectores de reconstrucción por retardo. Cuando sólo se mide un escalar $s(t)$, se forman vectores de retardo

$$\mathbf{y}_n = (s_n, s_{n-\ell}, s_{n-2\ell}, \dots, s_{n-(m-1)\ell}),$$

donde $\tau = \ell\Delta t$ es el retardo y m la dimensión de inmersión. Bajo hipótesis de suavidad, genericidad y dimensión suficiente, un teorema de inmersión permite reconstruir una geometría equivalente en un

⁴⁰**Lectura complementaria.** Robert C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2.^a ed., apéndice A, “Fourier Analysis”, y capítulo 9, apartados sobre cuantificación de series; Julien C. Sprott, *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*, capítulo 1, apartados sobre espectros, ciclos, quasiperiodicidad e indicadores; Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, capítulo 13, apartado inicial sobre datos de series temporales.

sentido preciso. En datos finitos, elegir τ , m , observable y preprocesamiento es parte del resultado.

Selección de retardo y dimensión. Un retardo demasiado pequeño agrupa puntos cerca de la diagonal; uno demasiado grande descorrelaciona las componentes y mezcla escalas. Se usan, como guías, el primer cruce o mínimo de autocorrelación o información mutua. La dimensión puede explorarse con falsos vecinos cercanos o saturación de una magnitud. Ningún umbral es universal.

Ejemplo algebraico resuelto: oscilador armónico. Sea $s(t) = \cos(\omega t)$, con periodo $T = 2\pi/\omega$. Si $\tau = T/4$,

$$s(t - \tau) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\omega t),$$

y por tanto

$$[s(t)]^2 + [s(t - \tau)]^2 = 1.$$

La reconstrucción bidimensional es un círculo. Si $\tau = 0$, todos los puntos caen en la diagonal; si $\tau = T/2$, caen en la anti-diagonal. El mismo sistema puede parecer degenerado por una elección inadecuada del retardo.

Práctica reproducible: reconstruir Lorenz desde $x(t)$

En Toolbox Chaos genere Lorenz con $dt = 0.01$, $T = 200$ y descarte 20. Exporte $x(t)$. Calcule la autocorrelación y elija tres retardos: uno corto, el primer cruce o escala equivalente, y uno cuatro veces mayor. Construya las nubes $(x_n, x_{n-\ell})$ y $(x_n, x_{n-\ell}, x_{n-2\ell})$. Registre número de muestras efectivas después de los desplazamientos. Repita con $z(t)$ y explique qué rasgos dependen del observable.

Lectura de reconstrucciones por retardo. Una reconstrucción útil separa estados sin convertir el conjunto en nube uniforme. Las hebras cercanas pueden ser estructura o escasez de datos; deben revisarse con otro retardo y más muestras. Un retrato de retorno s_{n+1} contra s_n aporta una representación distinta de una inmersión general: sólo usa retraso de una muestra.

Límite de interpretación

Una nube con forma de atractor no verifica las hipótesis de un teorema de inmersión. La estimación de dimensión requiere puntos temporalmente separados, y el determinismo requiere más evidencia que una reconstrucción suave. Filtrar, normalizar o interpolar cambia distancias y debe documentarse.

Lectura complementaria⁴¹

9.8 Sistemas con retardo, alta dimensión e hipercaos

Historia de estado en Mackey–Glass. En una ecuación con retardo,

$$\dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau)),$$

el valor $x(0)$ se complementa con una función de historia que determina el futuro. Debe especificarse una función historia $\varphi(t)$ en $[-\tau, 0]$. El espacio de estados es entonces infinito-dimensional, aunque la salida se represente con unas pocas coordenadas de retardo.

⁴¹**Lectura complementaria.** Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, capítulo 13, apartados sobre datos, coordenadas de retardo y embedología; Robert C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2.^a ed., capítulo 10, apartados sobre inmersión, reconstrucción y multifractales; Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2.^a ed., sección 12.4, “Reconstructing Attractors from Data”.

Ejemplo algebraico resuelto: Mackey–Glass. Una forma habitual es

$$\dot{x}(t) = \frac{\beta x(t-\tau)}{1 + x^n(t-\tau)} - \gamma x(t).$$

Un equilibrio constante $x(t) = x^*$ satisface

$$0 = x^* \left[\frac{\beta}{1 + (x^*)^n} - \gamma \right].$$

Además de $x^* = 0$, existe

$$x^* = \left(\frac{\beta}{\gamma} - 1 \right)^{1/n}$$

si $\beta > \gamma$. Para $\beta = 0.2$, $\gamma = 0.1$, $n = 10$, $x^* = 1$. El equilibrio no depende de τ , pero su estabilidad sí: el retardo entra en la ecuación característica trascendente de la linealización.

Alta dimensión: Lorenz–96. Con índices cíclicos,

$$\dot{x}_i = (x_{i+1} - x_{i-2})x_{i-1} - x_i + F, \quad i = 1, \dots, N.$$

El estado homogéneo $x_i = F$ es equilibrio porque el término de advección se anula. La divergencia es

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = -N,$$

de modo que el modelo contrae volumen en el espacio N -dimensional. Alta dimensión requiere criterios adicionales para *hipercaos*; esta etiqueta suele requerir más de un exponente de Lyapunov positivo convergente.

Práctica reproducible: historia y proyección

Ejecute el preset de Mackey–Glass y registre β, γ, n, τ , historia, paso y esquema numérico mostrado por la interfaz. Duplique el horizonte y compare series y retratos de retardo. Después ejecute Lorenz–96 con la dimensión y forzamiento del preset; grafique tres componentes contiguas y tres separadas. Exporte las series y compare correlaciones y escalas. Si *Lyapunov* aparece como no disponible, consérvelo como límite del contrato y no transfiera el algoritmo 3D.

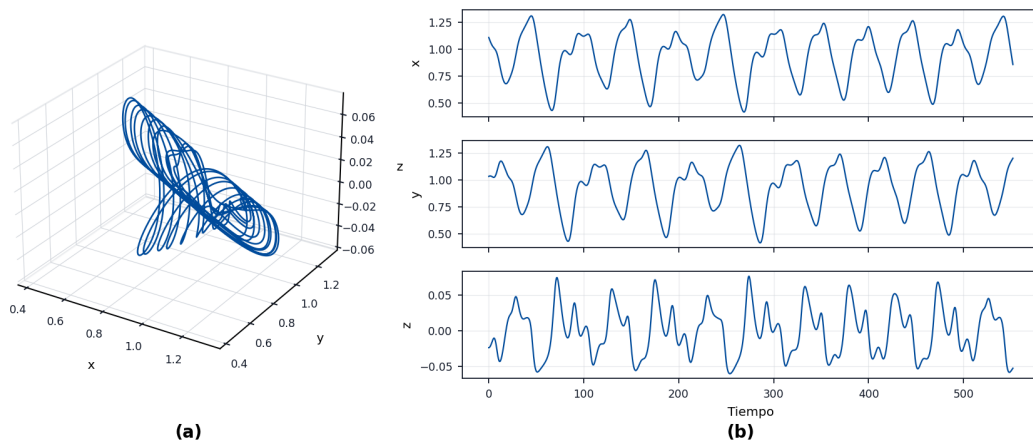


Figura 26: Mackey–Glass generado por Toolbox Chaos. La proyección usa retardos o componentes derivadas de una historia; conserva la naturaleza funcional de la ecuación y requiere el marco adecuado de EDO tridimensional.

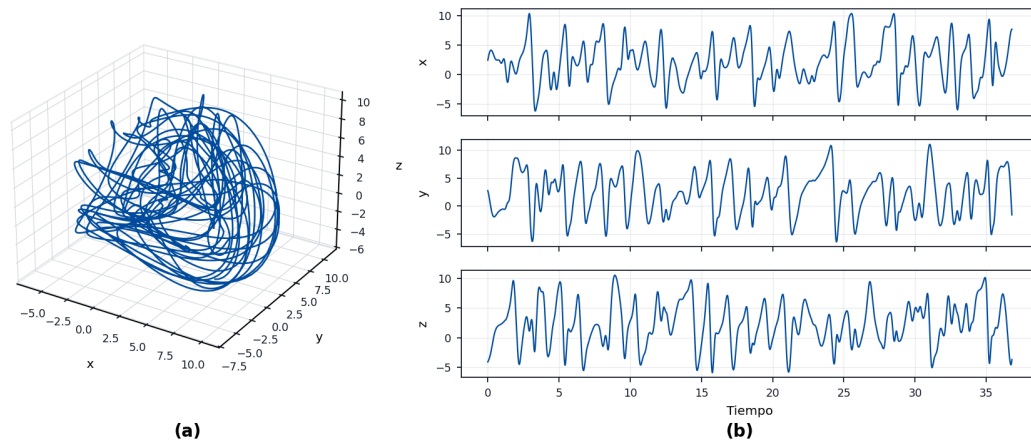


Figura 27: Lorenz-96 generado por Toolbox Chaos. Tres coordenadas muestran una sombra del estado de dimensión mayor; la estructura omitida debe discutirse antes de inferir geometría global.

Lectura de sistemas con retardo y alta dimensión. En retardo, una transición depende de la historia junto con el valor final. En alta dimensión, dos proyecciones distintas pueden ocultar o crear cruces aparentes. La presencia de varias escalas temporales sugiere calcular correlaciones, espectros y, cuando exista un método compatible, varios exponentes.

Límite de interpretación

Use una historia completa para representar el estado. Clasifique como hipercaótico un sistema por tener cuatro o más variables, ni extrapole un espectro de Lyapunov 3D a dimensión alta. Una señal irregular de Mackey-Glass o Lorenz-96 puede incluir un transitorio largo y requiere prueba de horizonte.

Lectura complementaria⁴²

9.9 Caos conservativo y caos transitorio

Estructura de los sistemas conservativos. En un sistema hamiltoniano

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

se cumple $\dot{H} = 0$ y la divergencia del campo es cero. No hay atracción volumétrica como en Lorenz. El espacio de fases puede mezclar islas regulares, toros y mares caóticos; hablar de atractor en el sentido disipativo suele ser inapropiado.

Ejemplo algebraico resuelto: mapa estándar. El mapa

$$p_{n+1} = p_n + K \sin q_n, \quad q_{n+1} = q_n + p_{n+1} \quad (\text{mód } 2\pi)$$

tiene Jacobiano

$$DF = \begin{pmatrix} 1 + K \cos q_n & 1 \\ K \cos q_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \det DF = 1.$$

⁴²**Lectura complementaria.** Julien C. Sprott, *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*, capítulo 6, apartados sobre sistemas de alta dimensión e hipercaos, capítulo 8, “Spatiotemporal Chaos”, y capítulo 9, “Delay Differential Equations”; Robert C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2.ª ed., capítulo 11, apartados sobre caos espaciotemporal; Tamás Tél y Márton Gruiz, *Chaotic Dynamics: An Introduction Based on Classical Mechanics*, capítulo 3, apartados sobre estabilidad y espacio de fases general.

Por tanto preserva área exactamente en aritmética matemática. Para $K = 0$, $p_n = p_0$ y $q_n = q_0 + np_0$; el número de rotación es $p_0/(2\pi)$. Al aumentar K , resonancias y capas caóticas pueden coexistir sin contracción global.

Tiempo de escape y caos transitorio. Una silla caótica no atractora puede retener órbitas durante tiempos irregulares antes de que escapen. Si la probabilidad de supervivencia se aproxima por

$$P(t) \simeq e^{-\kappa t},$$

κ es una tasa de escape y el tiempo medio idealizado es $1/\kappa$. Si de 1000 semillas quedan cerca de 368 a $t = 10$, entonces

$$\hat{\kappa} = -\frac{1}{10} \log(368/1000) \simeq 0.10, \quad \widehat{\langle T \rangle} \simeq 10.$$

La estimación de esta distribución requiere un conjunto de trayectorias y condiciones iniciales.

Práctica reproducible: conservación y supervivencia

En *Crear sistema*, defina el oscilador $\dot{q} = p$, $\dot{p} = -q$ con $(q_0, p_0) = (1, 0)$. Para Euler, Heun y RK4 y $h = 0.05, 0.025, 0.0125$, exporte $H_n = (q_n^2 + p_n^2)/2$ y grafique su deriva. Después seleccione un caso del catálogo que muestre escape o transitorio prolongado, si está disponible, y ejecute una malla explícita de condiciones iniciales con dos horizontes. Construya una curva de supervivencia sin reclasificar escapes como atractores.

Lectura de trayectorias conservativas y transitorias. En dinámica conservativa, puntos que llenan una curva indican movimiento regular confinado; nubes e islas pueden coexistir. La deriva sistemática de energía revela efecto del integrador, no disipación física. En caos transitorio, se debe graficar número de sobrevivientes en escala semilogarítmica y comprobar si existe un intervalo aproximadamente lineal.

Límite de interpretación

En un sistema conservativo, una trayectoria acotada debe analizarse mediante invariantes y estructura de volumen antes de clasificarla como atractor. Un determinante numérico cercano a uno se complementa con controles de conservación. El horizonte finito censura tiempos de escape, por lo que las irregularidades requieren extender la simulación y comparar condiciones iniciales.

Lectura complementaria⁴³

9.10 Sincronización y control de caos

Sincronización y variables de error. Dos sistemas se *sincronizan* cuando una medida de su diferencia converge o permanece pequeña bajo un acoplamiento especificado. La sincronía completa usa $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \rightarrow 0$; existen también sincronía de fase, generalizada y retrasada. *Control de caos* introduce una intervención pequeña y diseñada para estabilizar una órbita o región deseada. La evaluación del control declara señal, ley de control, costo y estabilidad del lazo cerrado.

⁴³**Lectura complementaria.** Robert C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2.^a ed., capítulo 4, apartados sobre transitorios caóticos y órbitas homoclínicas, y capítulo 8, apartados sobre dinámica hamiltoniana, KAM, mapa estándar y Hénon–Heiles; Tamás Tél y Márton Gruiz, *Chaotic Dynamics: An Introduction Based on Classical Mechanics*, capítulo 6, “Transient Chaos”, y capítulo 7, apartados sobre dinámica conservativa, mapa estándar, ergodicidad y mezcla; Julien C. Sprott, *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*, capítulo 4, apartados sobre flujos conservativos.

Dinámica transversal del error. Para dos sistemas idénticos con acoplamiento difusivo completo,

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1), \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) + k(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2),$$

el error $\mathbf{e} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ satisface, cerca de la variedad sincrónica,

$$\dot{\mathbf{e}} \simeq [D\mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t)) - kI]\mathbf{e}.$$

La estabilidad depende de la expansión transversal a lo largo de la trayectoria, no sólo de los autovalores en un equilibrio.

Ejemplo algebraico resuelto. Para el par lineal

$$\dot{x} = -ax, \quad \dot{y} = -ay + k(x - y),$$

$e = y - x$ cumple

$$\dot{e} = -(a + k)e, \quad e(t) = e(0)e^{-(a+k)t}.$$

Si $a = 0.2$, $k = 0.8$, el error disminuye con tasa 1. Sin acoplamiento, $k = 0$, disminuye con tasa 0.2. Este ejemplo separa sincronización inducida de la convergencia común a un equilibrio; en un sistema caótico, cada trayectoria puede seguir siendo irregular mientras el error transversal decrece.

Control en un mapa linealizado. Si cerca de una órbita objetivo el mapa controlado es

$$\xi_{n+1} = a\xi_n + bu_n, \quad u_n = -K\xi_n,$$

el multiplicador cerrado es $a - bK$. Para $a = 1.2$, $b = 1$, elegir $K = 0.5$ produce 0.7, estable. Debe comprobarse que la linealización y los límites del actuador sean válidos en la región usada.

Práctica reproducible: error de dos Lorenz

En *Crear sistema*, defina dos copias de Lorenz con variables $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$. La primera usa las ecuaciones clásicas; en la segunda añada $k*(x_1-x_2)$, $k*(y_1-y_2)$ y $k*(z_1-z_2)$ a las tres ecuaciones. Use $(10, 28, 8/3)$, estados $(1, 1, 1)$ y $(1.001, 1, 1)$, $k = 0, 1, 5$, RK4, $h = 0.005$, $T = 50$. Exporte datos y grafique $\log \|\mathbf{e}(t)\|$, evitando el logaritmo de cero. Repita con $h/2$ y registre la magnitud del acoplamiento.

Lectura del error de sincronización. La sincronización se evalúa en el error, no por superposición visual de dos curvas gruesas. Una recta descendente en escala semilogarítmica sugiere contracción exponencial transversal en ese intervalo. En control, compare régimen sin control, transitorio de activación, estado controlado y esfuerzo $u(t)$.

Límite de interpretación

La estabilidad global de la variedad sincrónica requiere controles más amplios que un error pequeño durante tiempo finito. Las pruebas de robustez usan perturbaciones de las condiciones iniciales. Un controlador que satura, cambia mucho el modelo o requiere conocer toda la trayectoria debe reportarse con esas condiciones de uso; estabilización de pequeña señal.

Lectura complementaria⁴⁴

⁴⁴**Lectura complementaria.** Robert C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2.^a ed., capítulo 12, apartados sobre control y sincronización; Julien C. Sprott, *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*, capítulo 1, apartados sobre exponentes, estabilidad y transitorios, y capítulo 10, apartados sobre realizaciones en circuitos; John Guckenheimer y Philip Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, capítulo 4, apartados sobre perturbaciones y métodos de Melnikov, como contexto de intervención débil.

10 Proyecto final sobre un sistema dinámico

Pregunta y evidencia del proyecto. El proyecto integra un resultado analítico con evidencia numérica. La pregunta debe ser acotada, por ejemplo: ¿cómo cambia un régimen al variar un parámetro?, ¿qué condiciones iniciales alcanzan dos destinos?, ¿qué propiedad permanece al refinar el paso?, ¿qué observable distingue periodicidad de irregularidad? El informe acepta como pregunta únicamente “graficar un atractor”.

Opciones de proyecto.

1. **Mapa:** logística, Hénon o sistema del *Explorador Sprott*; incluir puntos periódicos, multiplicadores, bifurcación y dinámica simbólica.
2. **Flujo clásico:** Lorenz, Rössler, Chua o Duffing–Ueda; incluir equilibrios, Jacobiano, disipación, sección y al menos un indicador.
3. **Cuencas y coexistencia:** comparar condiciones iniciales, resolución, horizonte y clasificador, con categoría indeterminada.
4. **Datos:** reconstruir una dinámica desde una serie, justificar muestreo, FFT/PSD, retardo, dimensión y control sustituto.
5. **Extensión:** retardo, alta dimensión, caos transitorio, sincronización o memoria fraccionaria, con alcance explícitamente prudente.

Desarrollo algebraico obligatorio. El informe debe incluir al menos uno de los siguientes cálculos completos:

- puntos fijos o equilibrios y clasificación mediante derivada o Jacobiano;
- adimensionalización y grupos de control;
- multiplicador de órbita o forma normal local;
- divergencia, invariante o balance de energía;
- ecuación variacional y significado del indicador de Lyapunov;
- solución de equilibrio para un sistema con retardo;
- dinámica del error para sincronización o control.

Copiar ecuaciones del catálogo sin desarrollar una consecuencia no satisface este requisito.

Protocolo computacional mínimo.

1. Registrar nombre del sistema, ecuaciones, parámetros y unidades o escalas.
2. Guardar condición o historia inicial, método, paso, tolerancias, horizonte, transitorio, muestreo y umbral de escape.
3. Producir tres vistas coordinadas desde los mismos datos cuando sea posible.
4. Exportar datos y metadatos junto con las imágenes.
5. Repetir con al menos dos pasos u opciones de tolerancia.
6. Repetir con horizonte o transitorio distinto.
7. Comparar condiciones iniciales si la pregunta es global.
8. Explicar disponibilidad y limitación de cada pestaña utilizada.

Matriz de afirmaciones del proyecto

Para cada conclusión, incluya cuatro columnas: afirmación; evidencia directa; control de robustez; y alternativa no descartada. Ejemplo: “la estimación finita de λ_1 es positiva” se apoya en la curva de convergencia y dos refinamientos; describe el conjunto de estados y parámetros que cubre la evidencia declarada.

Estructura del informe.

Sección	Contenido verificable
Pregunta y alcance	Variable de respuesta, parámetro o comparación y límites.
Modelo	Ecuaciones, estado, hipótesis, unidades y procedencia del preset.
Análisis	Desarrollo algebraico y predicción anterior a la simulación.
Método	Contrato numérico completo y versión del software.
Resultados	Datos, tablas, tres vistas, pies autosuficientes e indicador.
Robustez	Paso, horizonte, transitorio, semilla y, cuando proceda, resolución.
Discusión	Coincidencias y tensiones entre predicción, gráfica e indicador.
Conclusión	Respuesta graduada y lista de propiedades no demostradas.
Anexo	Archivos JSON/CSV, nombres de figuras y guía de reproducción.

Reproducción cruzada

Entregue a otro equipo una carpeta que contenga únicamente informe, configuración y datos. El equipo receptor repite una figura y un valor cuantitativo sin explicación oral. Debe registrar versión, diferencias y ambigüedades. El equipo autor corrige el protocolo y conserva ambas ejecuciones como evidencia de trazabilidad.

Límite de interpretación

El proyecto formula conclusiones acordes con muestreos finitos. Las expresiones “demuestra caos”, “prueba estabilidad global” o “valida el modelo físico” requieren un argumento matemático específico con todas sus hipótesis y evidencia adicional a una pestaña o una figura.

Lectura complementaria⁴⁵

11 Banco graduado de actividades y problemas

Estructura de actividades A–C. Las actividades A son de interpretación, las B combinan álgebra y simulación, y las C constituyen miniproyectos. En todos los casos se entrega predicción previa, contrato numérico, figura con ejes, datos exportados, control y evidencia pendiente por documentar.

Nivel A: lectura y conceptos

- A1. **Misma órbita, tres vistas.** Use Lorenz y marque en *Atractor 3D*, *Retratos 2D* y *Series temporales* el mismo intervalo. Explique qué información pierde cada vista.

⁴⁵**Lectura complementaria.** Edward N. Lorenz, *The Essence of Chaos*, capítulos 1–5 y apéndices “The Butterfly Effect”, “Mathematical Excursions” y “Glossary”, como modelo de conexión entre mecanismo, cálculo e interpretación; Robert C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2.^a ed., capítulos 9–10, sobre cuantificación y reconstrucción; Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, apéndice B, para control de error numérico.

- A2. **Mapa y flujo: reglas de actualización.** Para veinte puntos logísticos, compare una gráfica con marcadores y otra con líneas. Identifique qué segmentos no pertenecen a la dinámica.
- A3. **Nullcline y trayectoria: funciones complementarias.** Sobre el ejemplo $\dot{x} = x(1 - x - y)$, $\dot{y} = y(x - 1/2)$, señale dónde el vector es vertical y dónde horizontal.
- A4. **Transitorio.** Para Rössler, grafique las primeras y las últimas veinte unidades de tiempo con la misma escala. Decida qué estadísticas cambian.
- A5. **Proyección engañosa.** Localice un cruce en x - y de Lorenz y compare las coordenadas z y los tiempos de ambos puntos.
- A6. **Pie de figura auditable.** Reescriba el pie de una captura para incluir sistema, parámetros, estado, método, paso, tiempo, transitorio y mensaje principal.

Nivel B: cálculo y reproducción

- B1. **Saddle-node.** Derive ramas y estabilidad de $\dot{x} = \mu - x^2$; mida el tiempo para entrar en una tolerancia de 10^{-3} cuando μ se aproxima a cero.
- B2. **Plano traza-determinante.** Diseñe una matriz para cada región, calcule sus autovalores y reproduzca los retratos en *Crear sistema*.
- B3. **Jacobiano de Lorenz.** Derive $J(x, y, z)$, evalúelo en $E_0, E_{\pm}$ y confronte *Autovalores* para dos valores de ρ .
- B4. **Ciclo radial.** Estime periodo y multiplicador del ciclo $r = 1$ con dos pasos; compare con 2π y $e^{-4\pi}$.
- B5. **Periodo dos logístico.** Para $r = 3.2$, verifique $x_{\pm}$, su orden temporal y el multiplicador $M_2 = 0.16$.
- B6. **Contracción de Hénon.** Seleccione tres triángulos pequeños de condiciones iniciales, itere una vez y compare áreas con el factor $|b|$.
- B7. **Divergencia.** Calcule $\nabla \cdot f$ para Lorenz, Rössler y Duffing autónomo; relacione signo instantáneo con el volumen, sin inferir cuenca.
- B8. **Convergencia Lyapunov.** Para Lorenz, combine dos pasos, dos tiempos finales y dos intervalos QR. Informe sólo dígitos estables.
- B9. **Nyquist.** Genere dos señales sintéticas en *Crear sistema* o desde datos controlados, una debajo y otra encima de Nyquist; identifique el alias en *Espectro*.
- B10. **Reconstrucción.** Para una señal periódica, compruebe que $\tau = T/4$ produce un círculo y que $\tau = 0$ produce una diagonal.
- B11. **Dimensión de cajas.** Valide el algoritmo con etapas del Cantor antes de aplicarlo a una frontera de cuenca.
- B12. **Energía numérica.** Compare deriva de H para Euler, Heun y RK4; interprete la menor deriva como un indicador que se complementa con la prueba de conservación.

Nivel C: miniproyectos

- C1. **Ventana periódica.** Localice una ventana logística, verifique periodo, multiplicador y λ_N , y estudie sus bordes.
- C2. **Retorno de Rössler.** Defina una sección, interpole cruces, construya u_{n+1} contra u_n y discuta si es aproximadamente unimodal.
- C3. **Ruta de Duffing.** Varíe un solo parámetro, compare secciones estroboscópicas y clasifique la evidencia de periodicidad, toro o irregularidad.

- C4. **Frontera de cuenca.** Refine resolución y horizonte, estime una pendiente y cuantifique celdas que cambian de clase.
- C5. **Mackey–Glass.** Compare dos historias con el mismo $x(0)$; muestre cómo la historia completa define el estado.
- C6. **Lorenz–96.** Compare proyecciones contiguas y separadas, PSD y correlaciones; explique qué queda fuera de la vista.
- C7. **Caos transitorio.** Construya una distribución de tiempos de escape con datos censurados y pruebe un ajuste exponencial sólo en el intervalo sustentado.
- C8. **Sincronización.** Estime una tasa transversal desde $\log \|e(t)\|$, explore k y cuantifique el costo de acoplamiento.
- C9. **Acceso a coexistencia.** Compare semillas cercanas a equilibrios y alejadas; clasifique la evidencia sin convertir ausencia finita en ocultamiento.
- C10. **Explorador Sprott.** Elija un código sintético público, decodifique sus coeficientes, derive sus ecuaciones, calcule puntos fijos cuando proceda y conserve código, datos, estilo y metadatos.

Criterio de cierre del banco

Una actividad está terminada cuando otra persona puede repetirla, la predicción algebraica se contrasta con los datos, el rasgo interpretado sobrevive al control elegido y la conclusión se mantiene dentro del alcance del método. Obtener una imagen aporta criterio de cierre.

Límite de interpretación

Las actividades que requieren cálculos externos parten de datos exportados por Toolbox Chaos y deben conservar el script o procedimiento usado. Las atribuciones deben corresponder a la interfaz estimadores que no implementa, ni ocultar pasos manuales bajo frases como “el software demostró”. Cada herramienta se acredita por la operación que realmente realizó.

Lectura complementaria⁴⁶

12 Interpretación y comunicación de resultados

Lectura complementaria⁴⁷

La interpretación final requiere una secuencia que conecte gráficas, indicadores y controles numéricos, de modo que las conclusiones sean auditables y proporcionales a la evidencia. Las pestañas forman una secuencia de resultados conectados. Cada una responde una pregunta y prepara la siguiente. Una buena investigación avanza desde la verificación básica de la trayectoria hasta diagnósticos globales y pruebas de robustez.

Un “resultado reproducible” puede representarse como la tupla

$$\mathcal{E} = (f, \mu, \mathbf{x}_0, \mathcal{M}, h, T, T_0, \mathcal{O}, \mathcal{C}),$$

donde f es el modelo, $\mathcal{M}$ el método, $\mathcal{O}$ la observable y $\mathcal{C}$ los criterios de clasificación. La figura es una función de $\mathcal{E}$, dentro de un protocolo reproducible.

Con esa tupla como referencia, la siguiente ruta conserva una pregunta por etapa:

⁴⁶**Lectura complementaria.** Para seleccionar problemas adicionales: Robert L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*, 2.^a ed., capítulos 3–14; Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, capítulos 1–13 y apéndice B; Julien C. Sprott, *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*, capítulos 1–10; Julien C. Sprott, *Strange Attractors: Creating Patterns in Chaos*, secciones 2.3–2.4, 3.1–3.5, capítulos 4–6 y apéndices E–F.

⁴⁷**Lectura complementaria.** Edward N. Lorenz, *The Essence of Chaos*, capítulos 1–5; Robert C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics*, capítulos 9–10; Julien C. Sprott, *Elegant Chaos*, secciones 1.1–1.15.

1. *Series temporales*: ¿escapa, converge o mantiene un régimen acotado?
2. *Comparar metodos*: ¿la característica sobrevive al refinamiento?
3. *Atractor 3D y Retratos 2D*: ¿qué geometría y simetrías aparecen?
4. *Autovalores*: ¿qué predice la dinámica local de los equilibrios?
5. *Bifurcación*: ¿cómo cambia el régimen con el parámetro?
6. *Cuenca de atracción y Coexistencia*: ¿qué destinos dependen de la condición inicial?
7. *Lyapunov*: ¿existe expansión media convergente?
8. *Espectro*: ¿qué escalas temporales dominan y son consistentes con las series?

Al terminar el recorrido, una redacción proporcionada sería: “Para los parámetros indicados, las trayectorias permanecieron acotadas durante T ; el exponente máximo finito fue positivo y mostró una meseta estable al duplicar el horizonte; el diagrama de bifurcación presentó una nube persistente después de duplicar el transitorio. Estos resultados son consistentes con dinámica caótica en el régimen numérico estudiado.” La formulación mantiene el alcance del cálculo y reserva las propiedades adicionales para la evidencia correspondiente.

Gráfica o cálculo	Pregunta principal	Señal útil	Control antes de concluir
Atractor 3D	¿Qué región visita la órbita?	Geometría, simetría, acotación visible	Más condiciones iniciales, más tiempo y otras proyecciones
Series temporales	¿Cómo evoluciona cada variable?	Tendencia, oscilación, transitorio	Paso, horizonte, saturación y escala de ejes
Retratos 2D	¿Cómo se relacionan pares de variables?	Lazos, pliegues, proyecciones	Verificar cruces aparentes en dimensión mayor
Bifurcación	¿Cómo cambia el régimen con un parámetro?	Ramas, saltos, ventanas	Malla, transitorio, continuación y barrido inverso
Cuenca	¿Qué destino sigue cada condición inicial?	Regiones y fronteras	Resolución, tiempo, tolerancias y puntos auditados
Lyapunov	¿Hay expansión o contracción media?	Signo y meseta de $\lambda_i(t)$	dt , quemado, horizonte y frecuencia QR
FFT/PSD	¿Qué frecuencias dominan?	Picos, armónicos, banda ancha	Muestreo, Nyquist, ventana, segmento y transitorio
Autovalores	¿Qué ocurre cerca de un equilibrio?	Parte real/argumento y pares complejos	Hipótesis local, orden entero/fraccionario y no linealidad
Dimensión y recurrencia (ampliación externa)	¿Qué escala y retornos aparecen?	Meseta de pendiente, diagonales	Datos suficientes, umbral, sobremuestreo y ruido

De este modo puede construirse un argumento acumulativo y explícitamente condicionado. La demostración teórica integra una secuencia de hipótesis y pruebas. Si dos diagnósticos se contradicen, la contradicción es un resultado que exige revisar transitorios, métodos, hipótesis o la definición usada.

Ficha reproducible de resultados

Prepare una ficha de una página para un sistema elegido. Incluya la tupla $\mathcal{E}$, tres gráficas complementarias, dos pruebas de refinamiento y un párrafo con: evidencia observada, conclusión permitida, limitación y siguiente prueba. Intercambie la ficha con otra persona y compruebe que puede repetir el cálculo a partir de la información registrada.

Glosario

Término	Significado operativo en este manual
Estado	Vector que contiene la información que el modelo necesita para continuar la evolución.
Órbita	Conjunto ordenado de estados generados desde una condición inicial.
Espacio de fases	Espacio cuyos puntos representan estados; se distingue del espacio físico.
Flujo	Evolución continua Φ_t generada usualmente por una ODE.
Mapa	Regla discreta F aplicada por iteraciones.
Equilibrio	Estado $\mathbf{x}^*$ con $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$; punto fijo en un mapa si $F(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$.
Transitorio	Tramo inicial que aún depende fuertemente de la preparación y se excluye, con justificación, del análisis asintótico.
Atractor	Conjunto invariante que atrae una región de condiciones iniciales bajo una definición declarada.
Cuenca	Conjunto de condiciones iniciales asociadas a un destino asintótico.
Multestabilidad	Coexistencia de dos o más atractores para los mismos parámetros.
Bifurcación	Cambio cualitativo de la dinámica al variar un parámetro.
Sección de Poincaré	Superficie transversal que convierte cruces de un flujo en un mapa de retorno.
Exponente de Lyapunov	Tasa logarítmica media de crecimiento o contracción de perturbaciones.
PSD	Densidad espectral de potencia; distribuye potencia por frecuencia y conserva unidades físicas apropiadas.
Dimensión de correlación	Exponente de escala estimado a partir de la fracción de pares separados menos que r .
Recurrencia	Retorno de la trayectoria a una vecindad de un estado previo.
Orden fraccionario	Orden no entero de un operador con memoria; forma parte del modelo, no del tamaño de paso.

La secuencia didáctica se apoya en la intuición computacional de Sprott, la formulación cualitativa rigurosa de Devaney y el tránsito entre geometría y análisis propuesto por Strogatz. Las fuentes primarias completan ese marco para cada técnica numérica; todas se citan a continuación. Las explicaciones, actividades y figuras fueron redactadas o generadas para Toolbox Chaos; los textos e ilustraciones de las obras citadas permanecen en sus fuentes originales.

Referencias

- [1] J. C. Sprott, *Strange Attractors: Creating Patterns in Chaos*, M&T Books, New York, 1993, ISBN 1-55851-298-5.

- [2] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd ed., Addison–Wesley, Redwood City, 1989.
- [3] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 3rd ed., CRC Press, Boca Raton, 2024.
- [4] R. M. May, “Simple mathematical models with very complicated dynamics,” *Nature*, vol. 261, pp. 459–467, 1976. doi:10.1038/261459a0.
- [5] M. J. Feigenbaum, “Quantitative universality for a class of nonlinear transformations,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 19, no. 1, pp. 25–52, 1978. doi:10.1007/BF01020332.
- [6] C. Grebogi, E. Ott and J. A. Yorke, “Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation,” *Physical Review Letters*, vol. 50, no. 13, pp. 935–938, 1983. doi:10.1103/PhysRevLett.50.935.
- [7] J. C. Sprott and A. Xiong, “Classifying and quantifying basins of attraction,” *Chaos*, vol. 25, 083101, 2015. doi:10.1063/1.4927643.
- [8] A. Daza, A. Wagemakers, B. Georgeot, D. Guéry-Odelin and M. A. F. Sanjuán, “Basin entropy: a new tool to analyze uncertainty in dynamical systems,” *Scientific Reports*, vol. 6, 31416, 2016. doi:10.1038/srep31416.
- [9] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli and J.-M. Strelcyn, “Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory,” *Meccanica*, vol. 15, pp. 9–20, 1980. doi:10.1007/BF02128236.
- [10] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli and J.-M. Strelcyn, “Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 2: Numerical application,” *Meccanica*, vol. 15, pp. 21–30, 1980. doi:10.1007/BF02128237.
- [11] P. D. Welch, “The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms,” *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, vol. 15, no. 2, pp. 70–73, 1967. doi:10.1109/TAU.1967.1161901.
- [12] P. Grassberger and I. Procaccia, “Measuring the strangeness of strange attractors,” *Physica D*, vol. 9, nos. 1–2, pp. 189–208, 1983. doi:10.1016/0167-2789(83)90298-1.
- [13] J.-P. Eckmann, S. Oliffson Kamphorst and D. Ruelle, “Recurrence plots of dynamical systems,” *Europhysics Letters*, vol. 4, no. 9, pp. 973–977, 1987. doi:10.1209/0295-5075/4/9/004.
- [14] M. Caputo, “Linear models of dissipation whose (Q) is almost frequency independent–II,” *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, vol. 13, no. 5, pp. 529–539, 1967. doi:10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x.
- [15] D. Matignon, “Stability results for fractional differential equations with applications to control processing,” in *Computational Engineering in Systems Applications, CESA’96 IMACS Multiconference*, vol. 2, Lille, 1996, pp. 963–968.
- [16] M. W. Hirsch, S. Smale and R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 3rd ed., Academic Press, Waltham, 2013.
- [17] K. T. Alligood, T. D. Sauer and J. A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, New York, 1996.
- [18] R. L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, 2020.
- [19] R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2nd ed., Oxford University Press, New York, 2000.

- [20] T. Tél and M. Gruiz, *Chaotic Dynamics: An Introduction Based on Classical Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [21] J. C. Sprott, *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*, World Scientific, Singapore, 2010.
- [22] F. C. Hoppensteadt, *Analysis and Simulation of Chaotic Systems*, 2nd ed., Springer, New York, 2000.
- [23] E. N. Lorenz, *The Essence of Chaos*, CRC Press, Boca Raton, electronic edition, 2005; first published 1993.
- [24] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York, 1983.
- [25] E. Nahmad-Achar, *Topología y geometría diferencial con aplicaciones a la física*, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, 2022.
- [26] J. A. Jaurez Rosas, L. Ortiz Bobadilla, J. A. Palma Márquez and E. Rosales González, *Teoría geométrica de ecuaciones diferenciales I*, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, 2021.
- [27] J. A. Jaurez Rosas, L. Ortiz Bobadilla, J. A. Palma Márquez and E. Rosales González, *Teoría geométrica de ecuaciones diferenciales II*, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, 2021.
- [28] P. G. Amster, *Métodos topológicos en el estudio de las ecuaciones diferenciales no lineales*, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, 2021.
- [29] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [30] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer, Berlin, 2010.
- [31] R. Herrmann, *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*, 2nd ed., World Scientific, Singapore, 2014.
- [32] S. Das, *Kindergarten of Fractional Calculus*, Cambridge Scholars Publishing, Newcastle upon Tyne, 2020.
- [33] E. Capelas de Oliveira, *Solved Exercises in Fractional Calculus*, Springer, Cham, 2019.
- [34] K. Diethelm, N. J. Ford and A. D. Freed, “A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 29, pp. 3–22, 2002.